



EFOP-3.5.1-16-2017-00017

„NYE-DUÁL- Új utakon a duális felsőoktatással a Nyíregyházi Egyetemen,
az Északkelet-Magyarországi térség felemelkedéséért”

MŰSZAKI ÁBRÁZOLÁS I. (Ábrázoló geometria) ELŐADÁS-ÉS GYAKORLATI SEGÉDLET

Gépészmérnök, mezőgazdasági gépészmérnöki és közlekedésmérnök
I. évfolyamos hallgatói számára

Összeállította és szerkesztette:
Kósa Péter

A tananyag elkészítését a „NYE-DUÁL- Új utakon a duális felsőoktatással a Nyíregyházi Egyetemen, az Északkelet-Magyarországi térség felemelkedéséért” az EFOP-3.5.1-16-2017-00017 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Szerkesztő:
Kósa Péter

Lektor:
Dr. Páy Gábor

Kézirat lezárva: 2018. 07.03. nap

Kiadja.....

TARTALOMJEGYZÉK

1. ELŐSZÓ	5
2. TÉRMÉRTANI ALAPISMERETEK.....	6
2.1. Térelemek viszonya:.....	6
2.2. A térelemek alkalmazott jelölései:	7
2.3. A térmértani feladatok megoldásának lehetősége	6
2.4. Párhuzamossági és merőlegességi tételek	6
2.4.1. Párhuzamossági tételek.....	6
2.4.2. Merőlegességi tételek	8
3. VETÍTÉSEK.....	10
3.1.Középponti vetítés /centrális projekció	10
3.2.Párhuzamos vetítés (Paralel projekció)	10
4. Térelemek ábrázolása	13
4.1. Pont ábrázolása.....	13
4.1.1. Pont ábrázolása.....	13
4.1.1.1. Pont visszaállítás (rekonstrukció).....	14
4.1.2.Pontok ábrázolása a képsíkrendszer térnegyedeiben	15
4.1.3. Fedőpontok ábrázolása	16
4.1.4. Egyenes ábrázolása.....	17
4.1.5. Két térbeli egyenes kölcsönös helyzete	19
4.2. Síkok ábrázolása	20
4.2.1. Fősíkok	21
4.2.2. Vetítősíkok	22
4.2.3. Általános helyzetű síkok.....	23
4.3. A sík különleges helyzetű egyenesei	24
4.3.1. Horizontális fővonal	24
4.3.2. Vertikális fővonal	24
4.3.3.Esésvonalak (lejtővonalak).....	25
4.4.Példák a síkban fekvő egyenesekre és pontokra.....	26
5. Síkok metszésvonalának meghatározása	29
5.1.Két sík metszésvonala	29
5.2.Egyenes és sík metszéspontja	30
5.3 Síkpoligonok áthatása.....	32
6. Transzformáció.....	36
6.1. Pont transzformációja	37
6.2.Sík transzformációja.....	38
6.2.1. Sík nyomvonalának transzformációja.....	38
6.2.2.Polygon transzformációja.....	39

6.3. Test transzformációja	41
7. Rotáció [1]	42
8. SÍK LEFORGATÁSA ÉS VISSZAÁLLÍTÁSA (AFFINITÁS) [1][9]	43
8.1. Pont leforgatása	43
8.2. Egyenes leforgatása	44
8.4. Nyomvonal forgatása.....	45
8.5. Fővonal leforgatása	46
8.6. Síkidomok leforgatása	46
8.7. Affinitás	47
8.8. Sík és benne fekvő alakzatok visszaállítása.....	48
8.8.1. Pont visszaállítása.....	48
8.8.2. Síkidomok visszaállítása.....	48
9. Tételek méretgeometriája	51
9.1. Egyenes és sík egymásra merőleges helyzetben.....	51
9.2. Pont távolsága síktól és egyenestől	52
9.3. Két párhuzamos egyenes távolsága	52
9.4. Két kitérő egyenes távolsága	52
9.4. Pont és sík távolsága.....	54
9.5. Két egyenes szöge	55
9.6. Sík és egyenes szöge	56
9.6. Két sík hajlásszöge	57
10. TESTEK ÁBRÁZOLÁSA	58
10.1. Síklapú testek.....	58
10.1.1. A kocka ábrázolása.....	58
10.1.2. A hasáb ábrázolása	58
10.1.3. A gúla ábrázolása.....	59
10.2. Forgástestek ábrázolása	61
10.2.1. A henger ábrázolása.....	61
10.2.2. A kúp ábrázolása	61
10.2.3. A gömb ábrázolása	62
10.2.4. A körgyűrűfelület (tórusz) származtatása és ábrázolása.....	63
11. Testek dőfése egyenessel.....	65
11.1. Síklapú testek dőfése	65
11.1.1. Hasáb dőfése.....	65
11.1.2. Gúla dőfése	67
11.2. Forgástestek dőfése	71
11.2.1. Henger dőfése.....	71
11.2.2. Kúp dőfése.....	73
11.2.3. Gömb dőfése.....	74

12. Testek síkmetszése és palástkiterítése	75
12.1. Síklapú testek síkmetszése.....	75
12.1.1. Hasáb síkmetszése és palástkiterítése	75
12.1.2. Gúla síkmetszése és palástkiterítése	80
12.2. Forgástestek síkmetszése és palástkiterítése.....	83
12.2.1. Henger síkmetszése és palástkiterítése	83
12.2.2. Kúp síkmetszése	86
12.2.3. Gömb síkmetszése	90
13. Testek áthatása.....	95
13.1. Síklapú testek áthatása.....	95
13.2. Forgástestek áthatása	105
13.2.1. Közös tengelyű forgástestek áthatása	105
13.2.2. Metsződő tengelyű forgástestek áthatása.....	105
13.2.3. Kitérő tengelyű forgástestek áthatásai	107
14. Axonometria	115
14.1. Egyméretű axonometria.....	115
14.2. Kétméretű axonometria	115
14.3. Frontális axonometria	116
15. Gyakorló feladatok síkmetszésekhez és áthatásokhoz	117
IRODALOMJEGYZÉK	134

1. ELŐSZÓ

Az Ábrázoló geometria tananyagának elsajátítása az előadás, a gyakorlat és a segédlet segítségével a hallgatóság számára akadálymentes. Ennek alapján a példamegoldás a feladatok elkészítése minden nehézség nélkül lehetséges.

Megpróbálom bemutatni a megtanulandó elvek és alkalmazások helyes kapcsolatát mint a tananyag elmélyítésének alapvető módszereit.

Igen fontos, hogy a hallgatók megtalálják az eredményes tanuláshoz vezető helyes utat. A jegyzetben megadott anyagrészek és témakörök nagyrészt lefedik a félév során leadott tananyagot. A tanulás nem lesz eredményes csak az ábrák tanulmányozásával. A jegyzetben közölt feladatokat gyakorlás céljából többször lerajzolva és hasonló gyakorlati példákat megoldva a hallgatók elmélyíthetik tudásukat.

Az ábrák szemlélésénél és rajzolásánál fontos, hogy a hallgató térben is el tudja képzelni a mértani idomok és testek helyzetét. Ha a hallgatóban nem alakul ki a térszemlélet, akkor nehezebb a tárgy abszolválása. Térben gondolkodunk, de síkban rajzolunk.

A segédlet célja a nappali- és levelezős hallgatók kollokviumra való felkészítésének segítése. Példákon keresztül a félév tananyagát témakörönként végigvesz úgy, hogy az „kollokvium centrikus” legyen. Ez azt jelenti, hogy a kollokvium írásbelihez hasonló feladatokon keresztül tárgyalja az egyes anyagrészeket.

A segédlet csak kis mértékben érinti az axonometria területét és nem foglalkozik a perspektívikus ábrázolási rendszerekkel. A műszaki életben az ortogonális paralel projekciót részesítjük előnyben.

Mint látni fogjuk a témakörök alapkérdéseivel és összetettebb feladataival egyaránt foglalkozik. Ha folyamatosan oldjuk meg a feladatokat, akkor remélhető, hogy a kollokviumra egy „leülepedett” anyag birtokában lesznek a hallgatók.

2. TÉRMÉRTANI ALAPISMERETEK

Az összetett térbeli alakzatokat lebontva az egyszerű alakzatokhoz, először a felülethez, majd a vonalhoz, végül a ponthoz jutunk. A legegyszerűbb, a leggyakrabban használt alakzatokat térelemeknek nevezzük. Ilyen három van. A pont az egyik térelem. A pont általános mozgása a térben térgörbét, síkban való mozgása síkgörbét eredményez. Ha a pont mozgása közben nem változtatja irányát, a vonal, amelyet leír, egyenes; ez a második térelem. A mozgó vonal általában görbe felületet sűrol. Különleges esetben, pl. ha a vonal egyenes, és ennek minden pontja irányváltoztatás nélkül mozog, s ez az irány nem az egyenes iránya, a vonal mozgása síkfelületet, röviden síkot határoz meg. Ez a harmadik térelem. A három térelem tehát pont, egyenes és sík. Az egyenes két pont által határolt darabja a szakasz, a sík vonalakkal határolt területe a síkidom, s a tér felületekkel határolt része a test.

2.1. Térelemek viszonya:

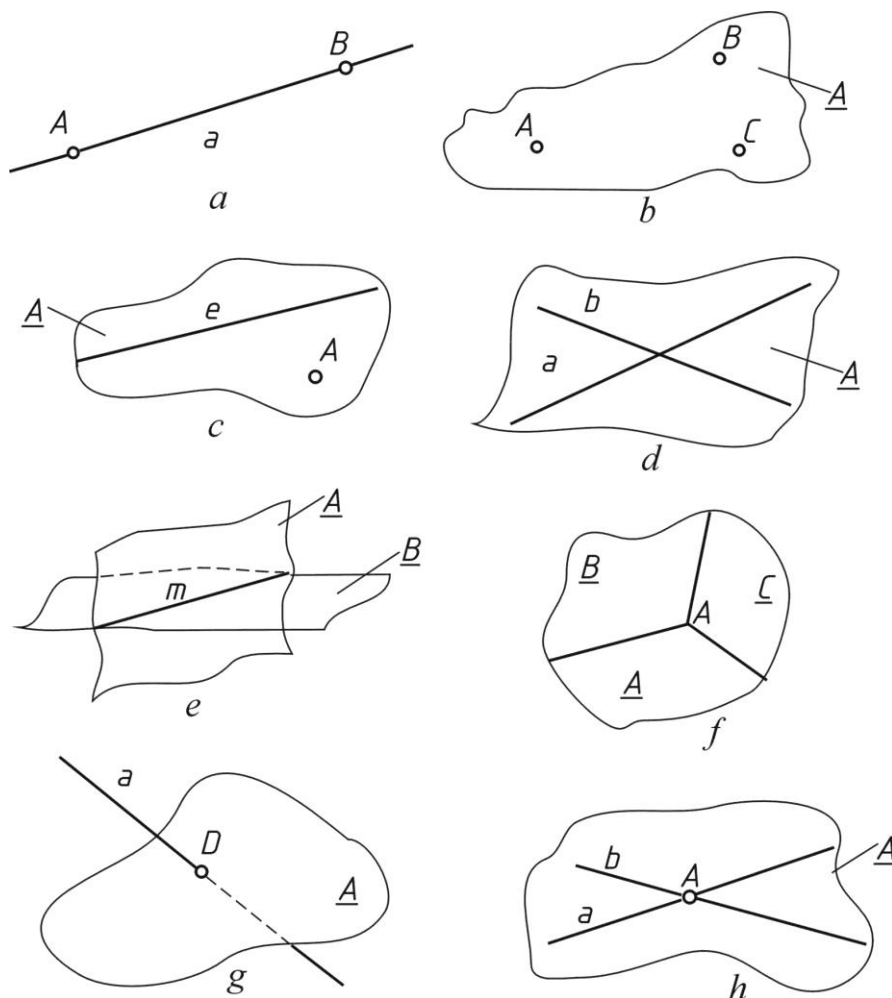
- Egybeesnek (rajta van, benne fekszik, egyik tartalmazza a másikat, illeszkedik)
- Párhuzamosak,
- Kitérők,
- Metszik (döfi, áthat rajta) egymást,
- Merőlegesek.

Ezeknek a viszonyoknak a megértéséhez az axiómák (alapigazságok) nyújtanak segítséget. Az axióma olyan tétel, mely egyszerűségénél, világosságánál fogva bizonyításra nem szorul.

- Két pont legrövidebb összekötése egyenest határoz meg (2.1.a ábra).
- Három, nem egy egyenesen fekvő pont síkot határoz meg (2.1.b ábra).
- Egy egyenes és egy nem rajta fekvő pont síkot határoz meg (2.1.c ábra).
- Két, egy ponton átmenő egyenes síkot határoz meg (2.1.d ábra).
- Két metsző sík egyenest határoz meg (2.1.e ábra).
- Három, nem egy egyenesen átmenő metsződő sík pontot határoz meg (2.1.f ábra).
- Sík és vele metsződő egyenes meghatároz egy pontot (2.1.g ábra).
- Két, közös síkú nem párhuzamos egyenes pontot határoz meg (2.1.h ábra).

Az axiómák segítségével a következők láthatók be:

- Két pont vagy egybeesik, vagy nem.
- Pont és egyenes, pont és sík úgyszintén.
- Két egyenes egybeeshet, metsződhet egymással, lehet párhuzamos és kitérő.
- Két párhuzamos egyenes is tekinthető metsződőnek, ha metszéspontjukat nem valóságosak, hanem a "végtelenben lévőnek" tekintjük.
- Az egymást metsző – és/vagy párhuzamos - egyenespárok síkot határoznak meg.
- Kitérő egyeneseknek nincsen sem közös pontjuk, sem közös síkjuk.
- Két metsződő egyenes merőleges egymásra, ha a metszéspontnál keletkezett szögszárak derékszöget zárnak be egymással.
- Két kitérő egyenes akkor merőleges egymásra, ha van két olyan merőlegesen metsződő egyenes, melyek a kitérő egyenesekkel párhuzamosak.
- A két sík normálisának szöge is egyenlő a két sík szögével.
- Ha egy egyenes két pontja benne fekszik a síkban, akkor az egyenes minden pontja a síkban fekszik.
- Az egyenest egy pontja két részre, két félegyenesre, félsugarra osztja. Ez a pont a két félegyenes kezdőpontja. Az egyenesnek két pontja által határolt része a szakasz (intervallum, szekció). A szakasz hossza a szakaszt határoló két pontnak a távolsága.



2.1.ábra [12]

2.2. A térelemek alkalmazott jelölései:

- A pontok latin nagybetűk (pl.: A, B, C, ...) vagy arab számjegyek (pl.: 0, 1, 2...).
- Az egyenesek latin kisbetűk (pl.: a, b, c...).
- A síkok jele: A, B, C...
- A képsíkokat mint kitüntetett síkokat a fejezetekben K-val jelöljük.
- A képsíkok számát a betű melletti számmal adjuk meg (pl.: K1, K2, K3...).

A térelemek egymáshoz viszonyított helyzetét gyakran különböző jelekkel adjuk meg:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| - párhuzamosság: $\parallel$ | - párhuzamos és egyenlő: $\#$ |
| - merőlegesség: $\perp$ | - illeszkedik: $-\bullet-$ |
| - hasonlóság: $\sim$ | - szög: $\angle$ |
| - egybevágóság: $\cong$ | - ív: $\cap$ |
| - egyenlőség: $=$ | - szakasz: AB |
| - nem egyenlő: $\neq$ | - következmény: $\rightarrow$ |
| - azonosság: $\equiv$ | - hozzá tartozó: $\subset$ |
| - távolság: $\mid$ | - kitérő: $-/-$ |
| - végtelen: ∞ | |

2.3. A térmértani feladatok megoldásának lehetősége

A térmértani feladatok megoldása az alaptételek igazságára épül. Szerkesztéseket azonban csak síkban tudunk végezni, ezért a feladatok megoldási útjának elemzése előtt összefoglaljuk az elvégezhető síkmértani szerkesztéseket.

A síkmértani szerkesztéseknél feltételezzük, hogy:

- két adott ponton át lehet egyenest húzni,
- adott pont körül két adott pont távolságával, mint sugárral lehet kört rajzolni,
- adott pontokból csak olyan további pontok szerkeszthetők, melyeket az adott pontok felhasználásával így módon rajzolható egyenesek és körök metszéspontjai szolgáltatnak.

Valamely mértani szerkesztést akkor tekintünk megoldottnak, ha az adatokból kiindulva a keresett alakzatokhoz az elvégezhető síkmértani szerkesztések útján, véges számú egyenes és kör rajzolásával jutunk el. Magát a szerkesztést gyakorlatilag rajzeszközök segítségével végezhetjük el, de a megoldást előbb gondolatban kell megoldanunk.

Térmértani feladatok esetén először tisztázni kell, hogy mit értünk egyáltalán valamely térmértani feladat elvi megoldásán.

A térbeli szerkesztéseknél feltételezhetjük a következőket:

- a) A sík akkor van megszerkesztve, ha megszerkesztettük azokat az elemeket, melyek a sík helyzetét a térben meghatározzák: három pontját, két metsződő vagy párhuzamos egyenesét, vagy egy egyenesét meg egy, az egyenesre nem illeszkedő pontját. Ha a feladat ezeket az elemeket tartalmazza, akkor a síkot megadja.
- b) Ha adva van két egymást metsző sík, akkor a metszésvonalukat is adottnak tekinthetjük, mert meg tudjuk szerkeszteni.
- c) Ha adva van - illetve megszerkeszthető - a térben egy sík, akkor el tudjuk végezni benne a síkmértanban elvégezhető szerkesztéseket.

Ezek után valamely térbeli szerkesztési feladatot megoldani annyit jelent mint az ismert adatokból eljutni az előbb felsorolt alapszerkesztések véges számú alkalmazásával a keresett alakzathoz. Más szóval a feladat megoldását olyan szerkesztési lépésekből kell felépíteni, melyek mind visszavezethetők sík kitűzésére, két sík metszésvonalának ismeretére s kitűzött síkban végrehajtható síkmértani szerkesztésre.

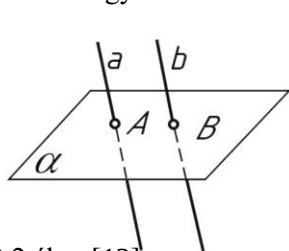
Az áttekinthetőség növelése érdekében ezért először felépítjük az elvi megoldást, felbontva azt egészen a térbeli szerkesztések bármely alaplépéséig. Ha ez sikerül, akkor a feladatot síkbeli szerkesztéssel már feltétlenül meg lehet oldani, ha az szerkesztéssel egyáltalán megoldható.

2.4. Párhuzamossági és merőlegességi tételek

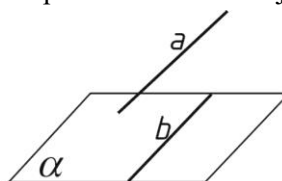
2.4.1. Párhuzamossági tételek

1. Ha egy sík két párhuzamos egyenes közül metszi az egyiket, akkor metszi a másikat is (2.2. ábra).
2. Ha egy sík illeszkedik két párhuzamos egyenes közül az egyikre, vagy azzal párhuzamos, akkor párhuzamos a másikkal is, vagy illeszkedik rá (2.3. ábra).
3. Egy egyenes, amely párhuzamos két egymást metsző egyenes egyikével és metszi a másikat, a két egymást metsző egyenesre illeszkedő síkban fekszik (2.4. ábra).
4. Ha két egyenes párhuzamos egy harmadikkal, akkor a két egyenes egymással is párhuzamos (2.5. ábra).
5. Ha a síkon kívül fekvő egyenes a síkban fekvő valamely egyenessel párhuzamos, akkor magával a síkkal is párhuzamos (2.6. ábra).
6. Ha valamely egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor a sík bármely pontjára illeszkedő egyenes, amely párhuzamos az adott egyenessel, benne van a síkban (2.7. ábra).
7. Ha egy egyenes párhuzamos egy síkkal és egy erre az egyenesre illeszkedő sík metszi az adott síkot, akkor a két sík metszésvonala párhuzamos az adott egyenessel (2.8. ábra).

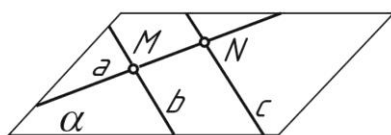
8. Ha egy egyenes két egymást metsző sík mindenkével párhuzamos, akkor az egyenes a két sík metszésvonalával is párhuzamos (2.9. ábra).
9. Egy egyenest metsző sík az ezen egyenessel párhuzamos síkot is metszi (2.10. ábra).
10. Ha két sík közül az egyik tartalmaz két olyan egymást metsző egyenest, melyekkel párhuzamos két egyenes a másik síkban is található, akkor a két sík párhuzamos egymással (2.11. ábra).
11. Ha két sík párhuzamos, akkor az egyik sík minden egyenese párhuzamos a más-íj síkkal (2.12. ábra).



2.2.ábra [12]



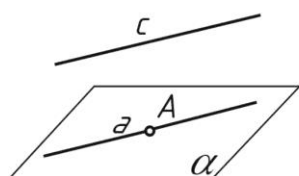
2.3.ábra [12]



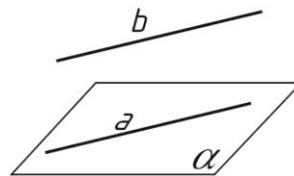
2.4.ábra [12]



2.5.ábra [12]

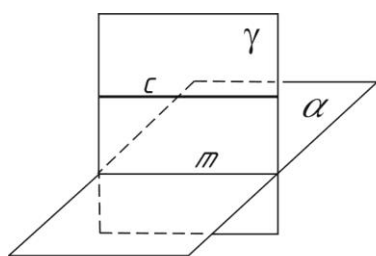


2.6.ábra [12]

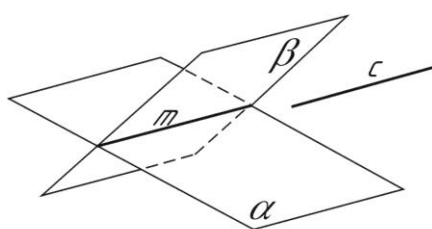


2.7.ábra [12]

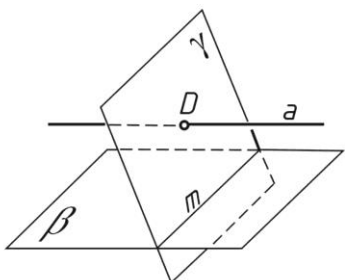
12. Ha két sík párhuzamos, akkor minden olyan egyenes, amely döfi az egyik síkot, döfi a másikat is (2.13. ábra).
13. Ha két sík párhuzamos, akkor minden olyan sík, amely metszi az egyik síkot, metszi a másikat is, a metszésvonalak egymással párhuzamosak (2.14. ábra).
14. Egy síkon kívül fekvő pontra csak egyetlen olyan sík illeszthető, mely párhuzamos az adott síkkal (2.15. ábra).
15. Ha két sík párhuzamos egy harmadikkal, akkor a két sík egymással is párhuzamos (2.16. ábra).
16. Párhuzamos egyeneseknek párhuzamos síkok közé eső szakaszai egymással egyenlők (2.17. ábra).



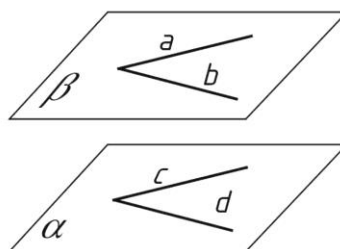
2.8.ábra [12]



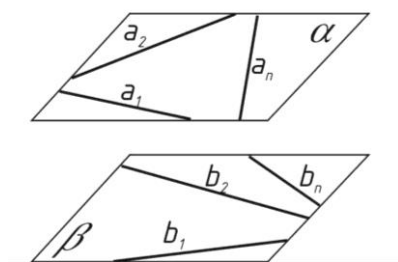
2.9.ábra [12]



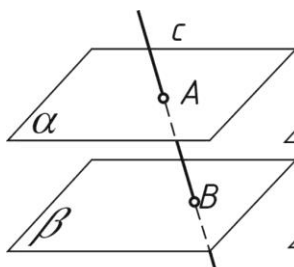
2.10.ábra [12]



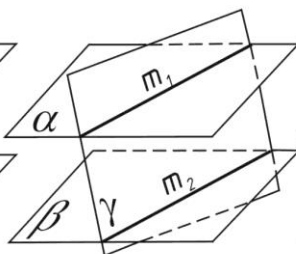
2.11.ábra [12]



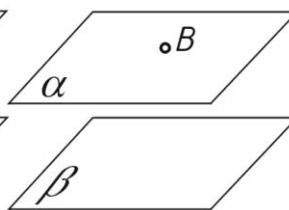
2.12.ábra [12]



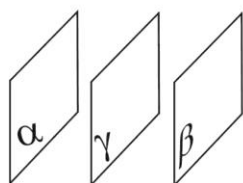
2.13.ábra [12]



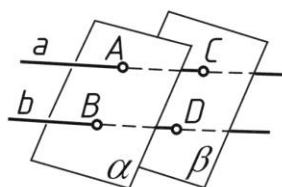
2.14.ábra [12]



2.15.ábra [12]



2.16.ábra [12]

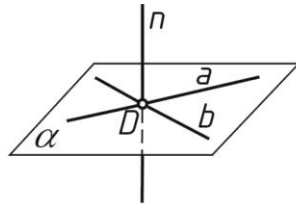


2.17.ábra [12]

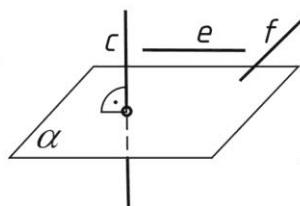
2.4.2. Merőlegességi tételek

1. Ha egy síkot metsző egyenes merőleges a sík két olyan egyenesére, melyek a sík és az egyenes metszéspontjára illeszkednek, akkor merőleges a síkra is (2.18.ábra).
2. Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor valamennyi, az adott síkban fekvő és az adott síkkal párhuzamos egyenesre is merőleges (2.19.ábra).
3. Ha két, egymással párhuzamos egyenes közül az egyik merőleges egy síkra, akkor a másik is merőleges arra a síkra (2.20.ábra).
4. Ha két egymással párhuzamos sík közül az egyik merőleges egy egyenesre, akkor a másik is merőleges arra az egyenesre (2.21.ábra).
5. Egy pontra csak egy olyan sík illeszthető, amely egy adott egyenesre merőleges. Ebben a síkban benne fekszik minden olyan egyenes, amely merőleges az adott egyenesre és illeszkedik az adott egyenesnek a síkkal való metszéspontjára (2.22.ábra).
6. Ha két sík ugyanazon egyenesre merőleges, akkor a két sík párhuzamos (2.23.ábra).
7. Ha két egyenes ugyanazon síkra merőleges, akkor a két egyenes párhuzamos (2.24.ábra).
8. Ha egy egyenes és egy sík ugyanazon egyenesre merőleges, akkor az adott egyenes vagy benne fekszik az adott síkban, vagy párhuzamos vele (2.25.ábra).
9. Egy pontból egy adott síkra csak egy merőleges egyenes bocsátható (2.26.ábra).
10. Ha egy sík egy olyan egyenesre illeszkedik, amely egy másik síkra merőleges, akkor a két sík egymásra merőleges (2.27.ábra).
11. Ha egy sík párhuzamos egy olyan egyenessel, mely egy másik síkra merőleges, akkor a két sík egymásra merőleges (2.28.ábra).
12. Ha két egymást metsző sík merőleges egy harmadik síkra, akkor az adott két sík metszésvonala is merőleges a harmadik síkra (2.29.ábra).
13. Ha három, egymást metsző sík közül mindegyik merőleges a másik kettőre, akkor a három síkmetszésvonalai is merőlegesek egymásra (2.30.ábra).
14. Egy olyan egyenesre, mely egy síkra nem merőleges, csak egyetlenegy olyan sík illeszthető, amelyik merőleges az adott síkra. Ez a sík tartalmazza az adott egyenest metsző és az adott síkra merőleges összes egyenest (2.31.ábra).

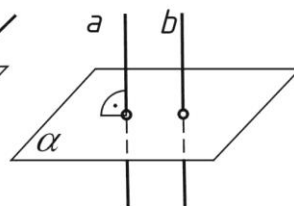
Megemlítjük, hogy a párhuzamossági és merőlegességi tételek sora ezekkel nincs lezárva, ugyanakkor ezek egy része bizonyos párhuzamossági és merőlegességi tételek következményének tekinthető.



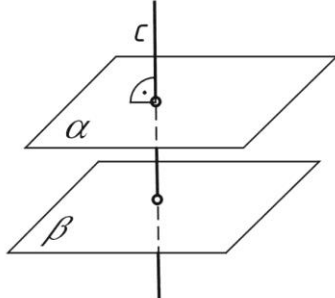
2.18.ábra [12]



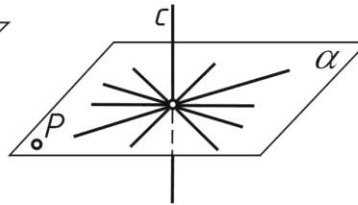
2.19.ábra [12]



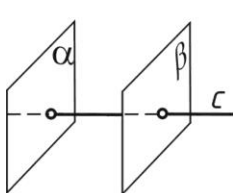
2.20.ábra [12]



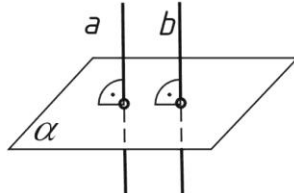
2.21.ábra [12]



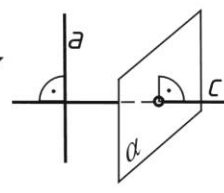
2.22.ábra [12]



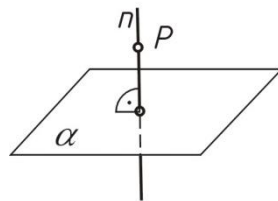
2.23.ábra [12]



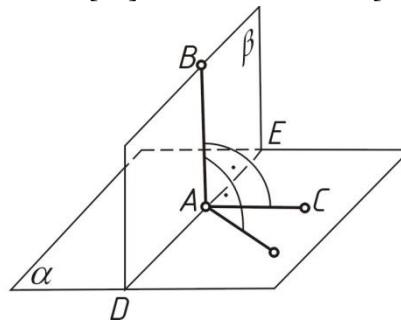
2.24.ábra [12]



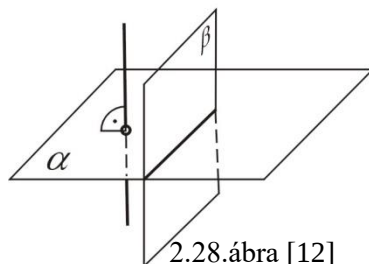
2.25.ábra [12]



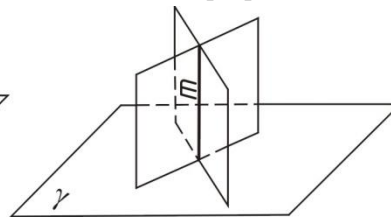
2.26.ábra [12]



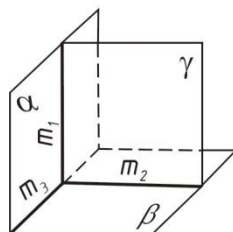
2.27.ábra [12]



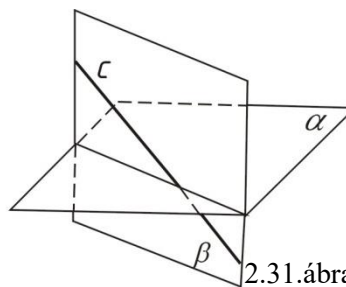
2.28.ábra [12]



2.29.ábra [12]



2.30.ábra [12]

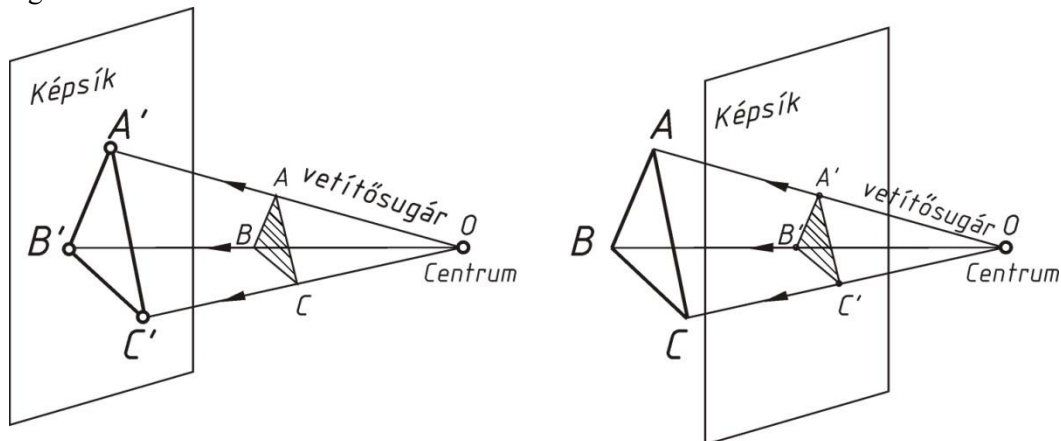


2.31.ábra [12]

3. VETÍTÉSEK

3.1.Középponti vetítés /centrális projekció

Ez a legtermészetesebb vetítés, mert ez emlékeztet a legjobban arra a kép előállítási módra, melyet a szemünk végez.



3.1.ábra [2]

Ennél a vetítési módnál a centrumból fénysugarak (vetítősugarak) indulnak ki, s a kérdéses tárgy széleit súrolva tovább haladnak, majd nekiütköznek a felfogó képsíknak és ezeknek a vetítő sugaraknak a képsíkkal alkotott dőléspontjainak összessége adja a tárgy képét.

Ha a képsík a tárgy mögött van, a kapott kép nagyobb, ha a képsík a centrum és a tárgy között van, a kapott kép kisebb, mint a tárgy.

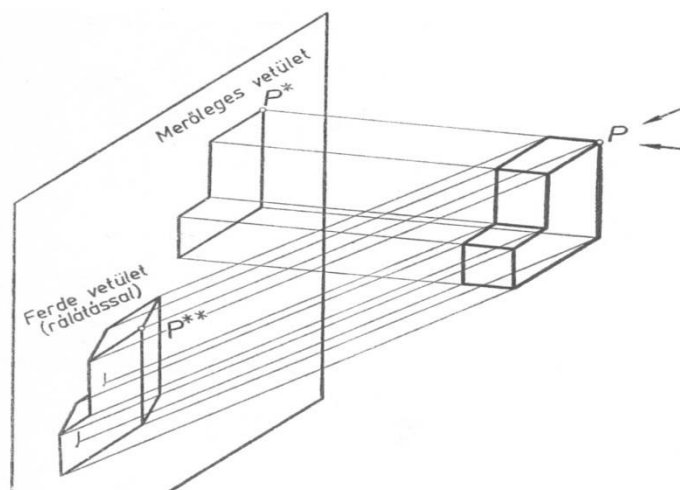
A középponti vetítéssel kapott képek szemléletesek, azonban szerkesztésük nehézkes, s a tárgy méretei sem mérhetők le közvetlenül, ezért a gépiparban ritkán alkalmazzuk.

3.2.Párhuzamos vetítés (Paralel projekció)

Ha a vetítési központot a végtelenbe helyezzük (a Nap), akkor az onnan jövő vetítősugarak egymással párhuzamosan haladnak. E vetítő-sugaraknak a képsíkokkal alkotott dőléspontjai adják a tárgy párhuzamos vetületét.

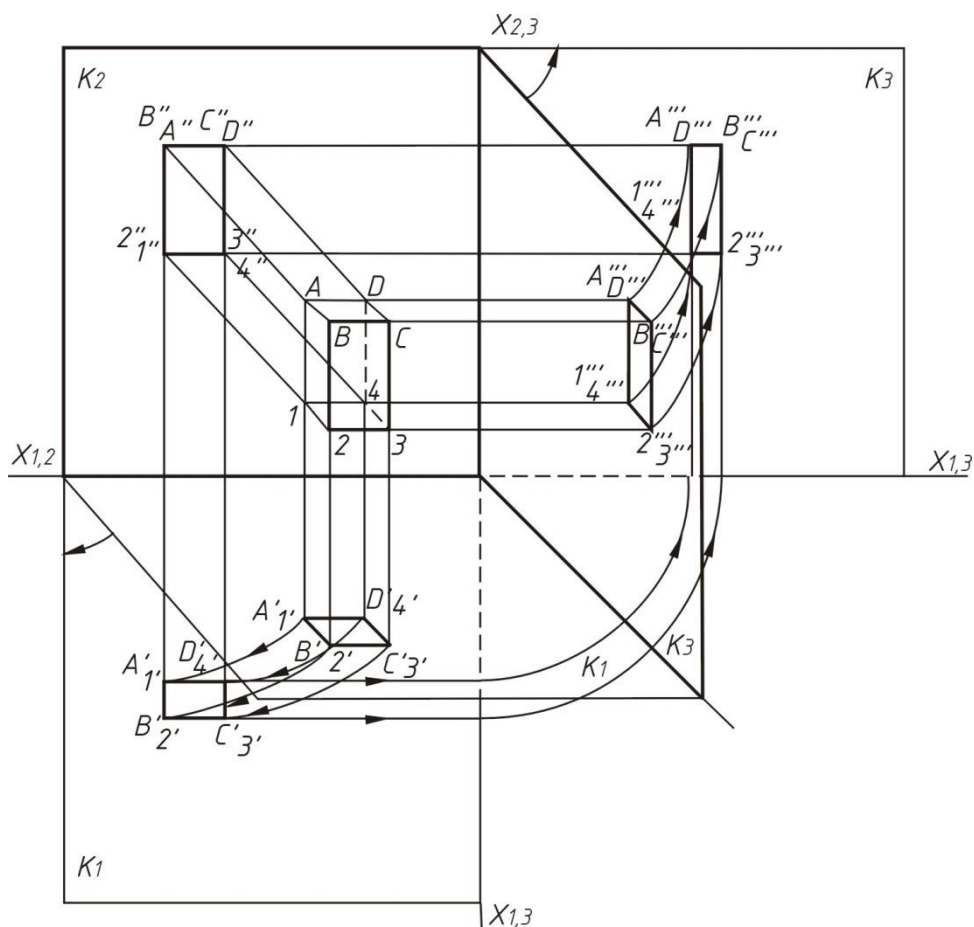
A párhuzamos vetítési módnak két esete van:

- Ferdeszögű párhuzamos vetítés (Klinogonális paralel projekció)**
Akkor beszélünk erről a vetítési módról, ha a vetítősugarak egymással párhuzamosan haladnak, de a képsíkot ferdeszög alatt érik.
- Derékszögű párhuzamos vetítés (Ortogonalis paralel projekció).** Ennél a vetítési módnál a vetítősugarak egymással párhuzamosan haladnak és a képsíkra merőlegesen állnak. Az így elkészült vetületek kevésbé szemléletesek, de az egyes méretek a vetület alapján közvetlenül megállapíthatók, a nem közvetlenül mérhető méreteket pedig egyszerű szerkesztéssel meghatározhatjuk. Ezért a tárgy vagy test alakjára és helyzetére nézve két, de több esetben három irányból szükséges a vetületek elkészítése.

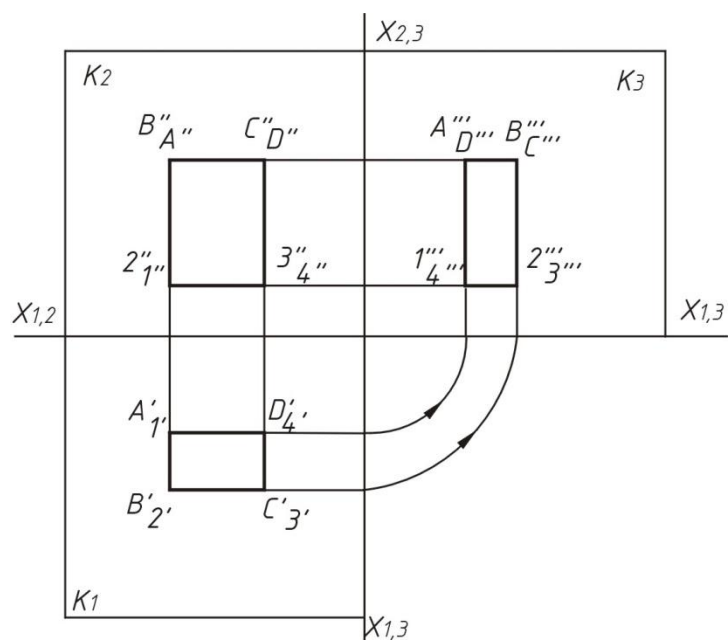


a) Klinogonális és b) Ortogonalis paralel projekció
3.2.ábra [7]

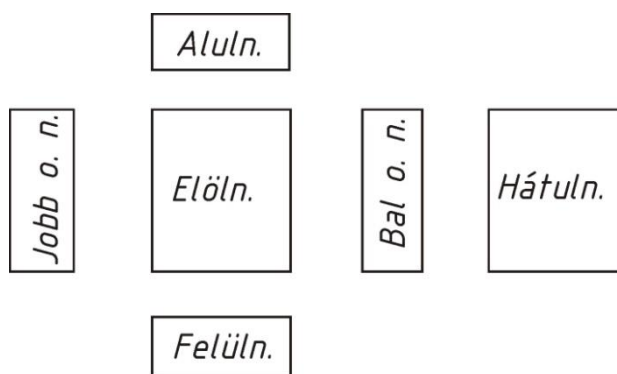
A síkokat, amelyekre a vetületeket készítjük, első (K_1)-, második (K_2)- és harmadik (K_3) képsíknak nevezzük. A képsíkok alkotják a Monge- féle képsíkrendszert. A képsíkok merőlegesen metsződnek és a metszéspontokat ún. képsíktengelyeknek (axis) nevezzük. A képsíktengelyek jelölésének rendszere utal, hogy melyik két képsík közötti merőleges kapcsolat áll fenn ($X_{1,2}$; $X_{2,3}$; $X_{1,3}$). Ezt a kapcsolatrendszert jól szemlélteti a 3.3.ábra melyen a térbeli képsíkrendszert hogyan is származtatjuk át síkbeli vetületekké. A 3.4. ábra már csak a letisztult három fő vetületet mutatja meg. Ennek a vetítési és ábrázolási rendszernek megfelelően használjuk a testek merőleges vetületeit (3.5. ábra).



3.3.ábra [2]



3.4.ábra A három fő vetület [2]



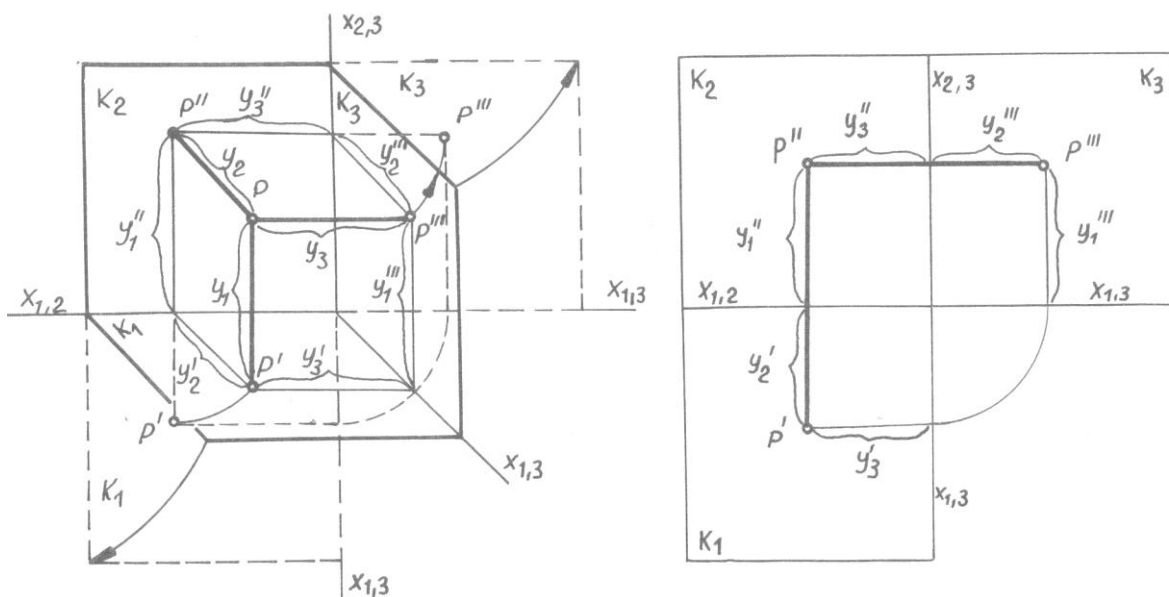
3.5.ábra.. Szabványos vetületek elhelyezkedése [2]

4. TÉRELEMEK ÁBRÁZOLÁSA

4.1. Pont ábrázolása

Egy tetszés szerinti pont térbeli helyzetének egyértelmű meghatározására elegendő két képének a felrajzolása, ugyanis a térbeli pont és annak merőleges vetülete közötti távolság mutatja az illető pontnak a képsíkoktól mért távolságát.

A pont mindhárom képsíktól mért távolságait képtávolságoknak nevezzük. Így beszélünk Y_1 , Y_2 , és Y_3 képtávolságról 4.1.ábra. A képtávolságnak a képsíkon keletkező vetületét rendezőnek nevezzük, s itt is beszélhetünk első, második és harmadik rendezőről.



4.1. ábra A képsíkrendszer síkba terítése [4]

Az ábrán világosan látszik, hogy milyen összefüggés van a rendezők és a képtávolságok között. Tehát a P térbeli pont:

- Y_2 első rendezője megadja a pont első képének, P' -nek az $X_{1,2}$ tengelytől, a térbeli pontnak pedig a K_2 -től mért távolságát. $Y_2' = Y_2 = Y_2'''$

- Y_1' második rendezője megadja a pont második képének, P'' -nek az $X_{1,2}$ tengelytől, a térbeli pontnak pedig a K_1 -től mért távolságát. $Y_1'' = Y_1 = Y_1'''$

- Y_3' harmadik rendezője megadja a pont első és második képének, P' -nek, ill. P'' -nek az $X_{1,3}$ ill. $X_{2,3}$ tengelyektől mért; a térbeli pontnak pedig a K_3 -tól mért távolságát. $Y_3' = Y_3 = Y_3''$

4.1.1. Pont ábrázolása

A pont ábrázolásának lépései logikus sorrendben a következők:

- Felvesszük az $X_{1,2}$ tengelyt és rá merőlegesen vékony szaggatott vonallal a rendezőt.
- A képtávolságok előjeleiből megállapíthatjuk, hogy a pont hányadik tértérjedben van. Ez határozza meg, hogy az $X_{1,2}$ tengelyhez viszonyítva hogyan helyezkednek el a pont képei, a képsíkrendszer egyesítése után. Ha valamelyik képtávolság „0”, akkor a pont valamelyik képsíkra illeszkedik, így ellentétes képe az $X_{1,2}$ tengelyen lesz.
- Elhelyezzük a rendezőre a pont első és második képét, a rendező hosszak felmérésével. Az első rendező a második képtávolsággal a második rendező az első képtávolsággal egyezik meg.
- A harmadik képtávolságnak megfelelően felvesszük az $X_{1,3}$ ill. $X_{2,3}$ tengelyt merőlegesen az $X_{1,2}$ tengelyre.

- e) Végiggondoljuk az ökölszabály első felét: az $X_{1,2}$ tengely az első és a második kép között teremt kapcsolatot akkor az $X_{1,3}$ tengely az első és harmadik, az $X_{2,3}$ tengely a második és a harmadik kép között. Így az első ill. a második képből megrajzoljuk a vékony szaggatott rendezővonalakat az $X_{1,3}$ ill. $X_{2,3}$ tengelyre merőlegesen.
- f) Végiggondoljuk az ököl szabály második felét: Az 1;2 rendezőből átmegyünk az 1;3 ill. 2;3 rendezőre, lehet, az elmaradó második ill. első rendezőt értelemszerűen a képsíkrendszer egyesítési szabálya szerint felmérjük az $X_{1,3}$ ill. $X_{2,3}$ tengely jobb ill. bal oldalára, így a pontot ábrázoljuk három képével.

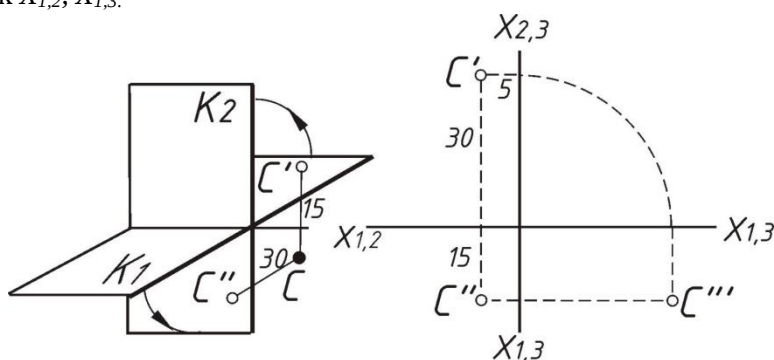
Nézzük meg ezt egy konkrét feladaton.

Ábrázoljuk a „C” pontot három képével! A harmadik kép megszerkesztésekor $X_{1,3}$ tengelyt alkalmazunk (4.2.ábra).

Az „C” pont koordinátái:

- A „K1” képsík negatív felétől 15 egység a korábbiakban „-K1” → 15.
- A „K2” képsík negatív felétől 30 egység a korábbiakban „-K2” → 30.
- A „K3” képsík negatív-negatív negyedétől 30 egység „-K3” → 5.

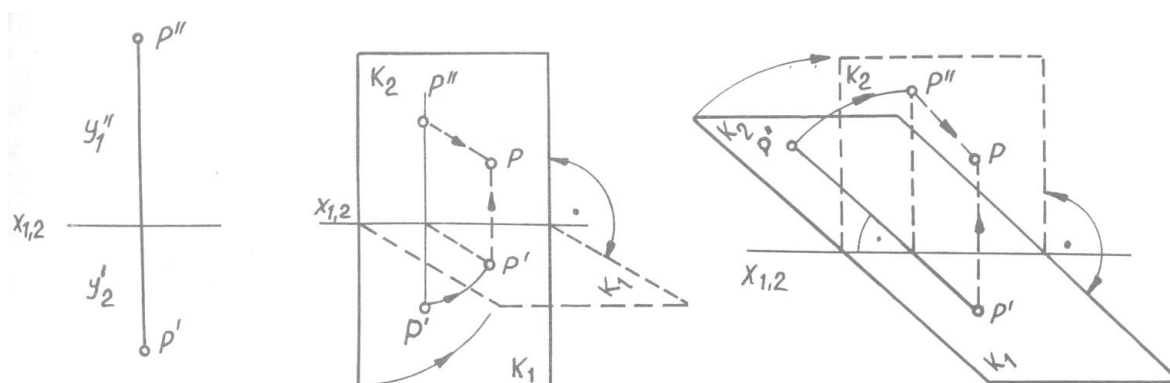
Alkalmazott tengelyek $X_{1,2}$; $X_{1,3}$.



4.2.ábra [9]

- a) Felvesszük az $X_{1,2}$; $X_{2,3}$; $X_{1,3}$ tengelyeket.
- b) A képtávolságok előjeleiből (mínusz; mínusz) megállapítjuk, hogy a „C” pont a harmadik tértetegyedben van. Ez azt jelenti, hogy a „C” pont első képe az $X_{1,2}$ tengely felett, második képe az $X_{1,2}$ tengely alatt van.
- c) A „C” pont első képét az $X_{1,2}$ tengely fölé helyezzük első rendezői (második képtávolság) 30 egység távolságra. Második képet az $X_{1,2}$ tengely alá A harmadik kép az első- és a második kép merőleges vetítőjének metszódésében található.

4.1.1.1. Pont visszaállítás (rekonstrukció)

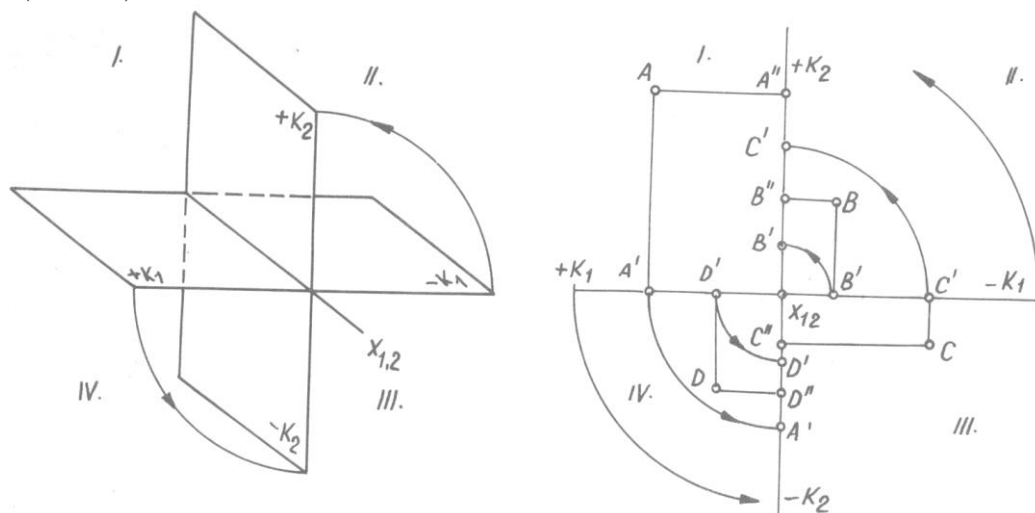


4.3.ábra Térbeli pont visszaállítása [4]

Rekonstrukcióról akkor beszélünk, amikor a rajzból kell megállapítani alaksajátosságainak (egyenes, sík, stb.) térbeli helyzetét. Ez szükséges a jó rajzolásához.

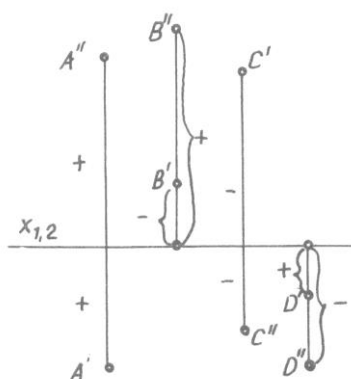
4.1.2. Pontok ábrázolása a képsíkrendszer térnegyedeiben

Eddig a pontot (mint a legkisebb térelemet) csak az első térnegyedben ábrázoltuk. A Monge-féle képsíkrendszerben négy térnegyed van melyet a K_1 és K_2 képsíkok osztanak fel. A II, III és IV-ik térnegyedben lévő térelemek és azok rendezőinek előjelei aszerint változnak, hogy a két képsík pozitív, vagy negatív felére esnek a vetületeik. Ebből adódik, hogy a különböző térnegyedekben elhelyezkedő térelemeknek első és második képei az $X_{1,2}$ tengelyhez képest nem az első térnegyedben megszokott helyen találhatóak (4.4.ábra).



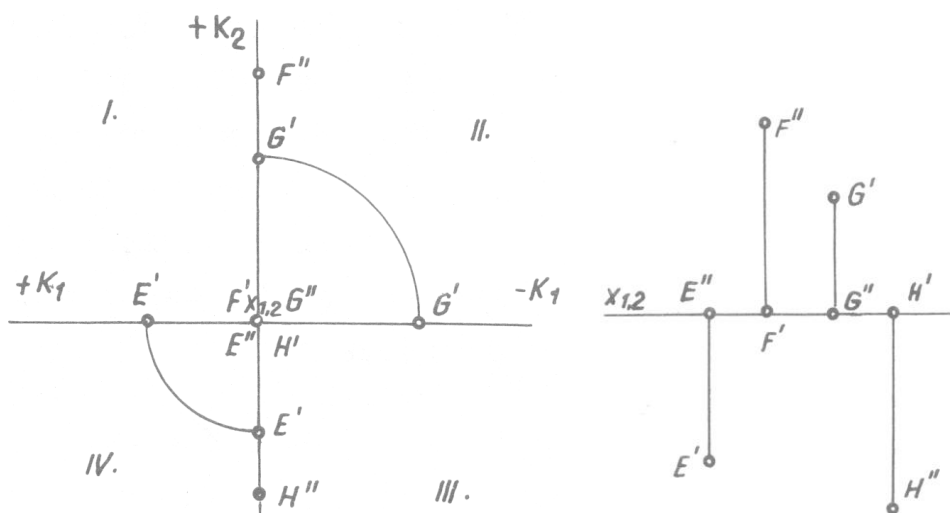
4.4.ábra Pontok ábrázolása a négy térnegyedben [4]

A vetületek elhelyezkedésének megértéséhez egyszerűbb, ha a képsíkrendszerre a harmadik képsík irányából nézünk rá. Azaz a képsíkokat élben láthatjuk. Így könnyen beazonosíthatók a képsíkoktól mért távolságai a térbeli pontoknak és a merőleges vetületeit is könnyebb meghatározni. A térbeli pontok vetületeinek elhelyezkedését úgy határozhatjuk meg, hogy az $X_{1,2}$ tengely mentén összezárjuk a képsíkrendszert. A $+K_1$ fedésbe kerül a $-K_2$ -vel, míg a $-K_1$ a $+K_2$ -vel. Ezután már csak merőlegesen kell ránézni az összeforgatott képsíkrendszerre. Így a helyére kerülnek a vetületek attól függően, hogy a képsíkrendszer melyik térnegyedében is volt a térbeli pont. Az 4.5.ábra mutatja az 4.4.ábra helyes megoldását. A rendezők előjelei is mutatják, hogy az adott ponthoz tartozó vetületrendezők a képsíkok pozitív vagy negatív felére estek.

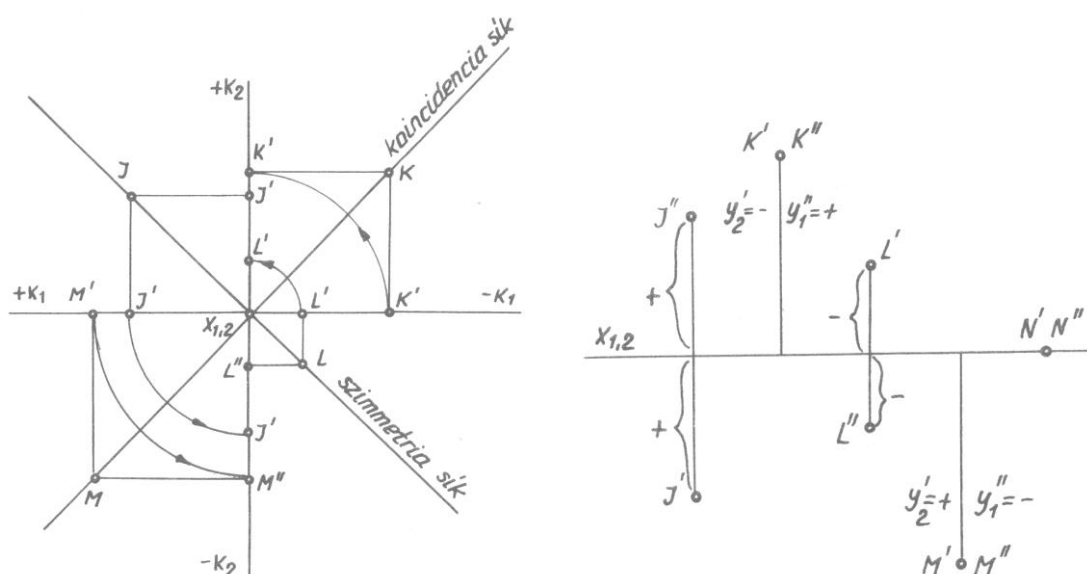


4.5.ábra [4]

Az 4.6. ábra azokat az eseteket mutatja be, amikor a pontok a képsíkokra illeszkednek. Ebben az esetben a pont ha a $+K_1$ -re illeszkedik, akkor a térbeli pont önmaga lesz az első vetülete. A második képét a K_2 felé való merőleges vetítéssel határozhatjuk meg. Mivel a pontot csak az $X_{1,2}$ tengelyig tudjuk vetíteni, ott lesz annak a második képe. Hasonlóképpen kell eljárni a többi esetben is.



4.6.ábra [2]



4.7.ábra [2]

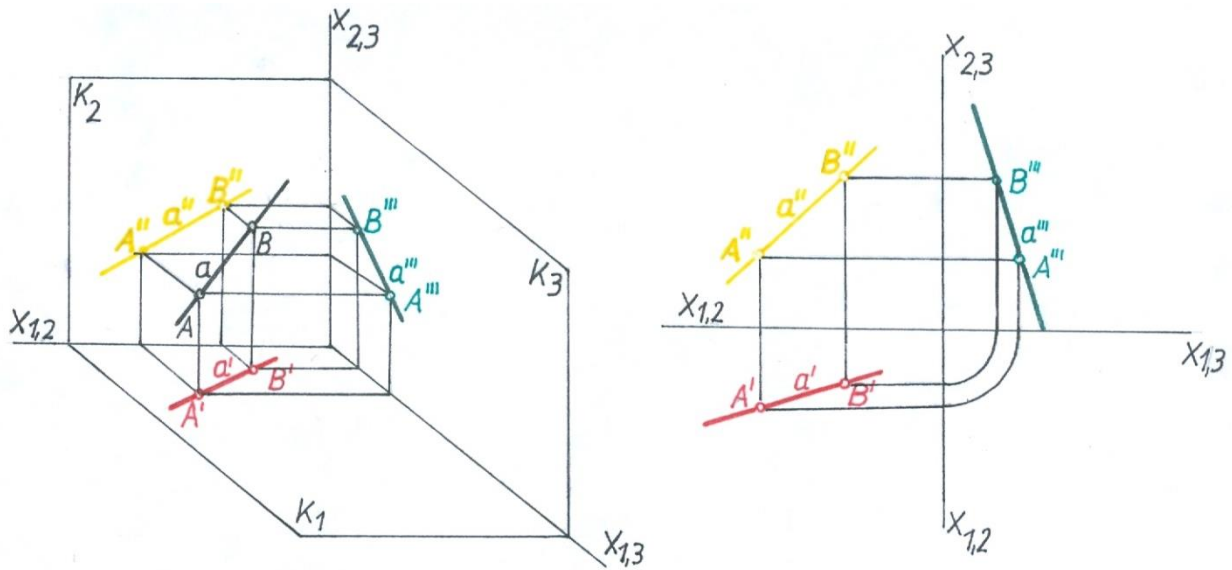
Ha a pontok az I. és a III. térféld felező síkjában helyezkednek el, azok a szimmetria síkban vannak. Abban az esetben, ha a pontok, a II. és a IV. térféld felező síkjára illeszkednek, a koincidencia-síkban vannak.

4.1.3. Fedőpontok ábrázolása

Nézzük meg a 3.3. ábrán látható hasáb pontjait. Azoknak a pontoknak, amelyeknek első képei egybe esnek, első fedőpontoknak (pl.: „B” és „2” jelű pontok), amelyeknek a második képük esik egybe, második fedőpontoknak nevezzük („B” és „A” jelű). A hasáb speciális elhelyezkedéséből adódik (élei merőlegesek a képsíkokra), hogy mindhárom vetítési irányban megfelelően a pontok merőleges vetületei fedőpontpárokat adnak.

4.1.4. Egyenes ábrázolása

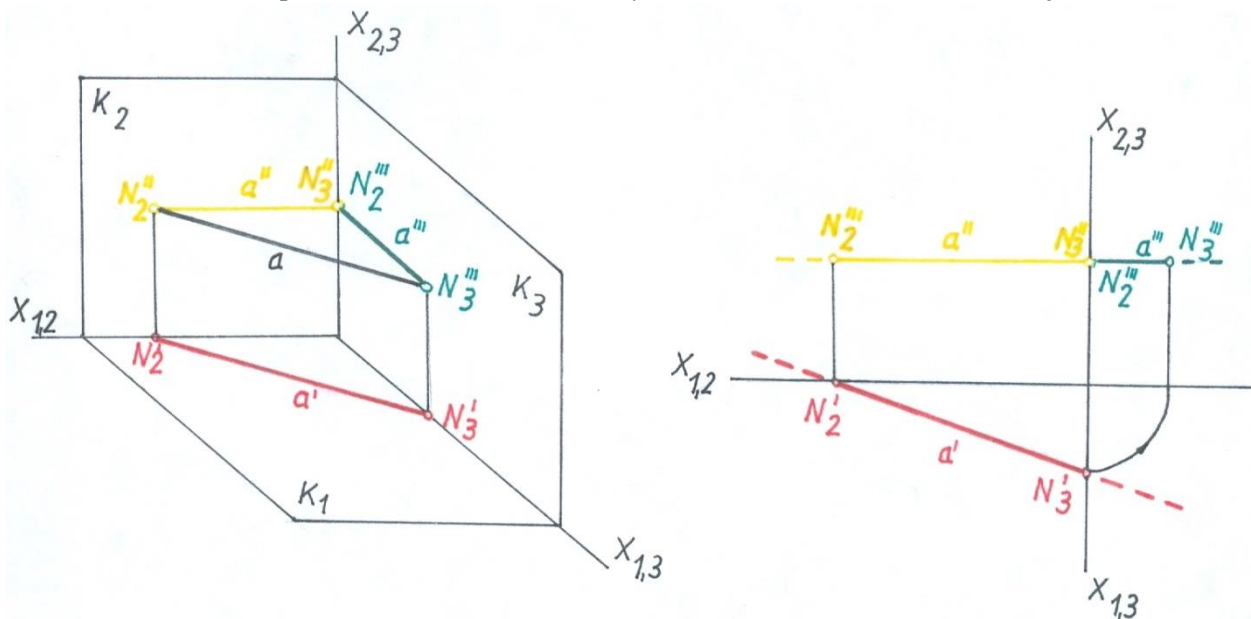
A planimetriában tudjuk, hogy az egyenest két pontja meghatározza – így elegendő két tetszés szerinti 'A' és 'B' pontjának képeit ábrázolni és ezeket összekötni. A két pont azonos indexű képeinek összekötésével kapjuk az egyenes megfelelő képeit.



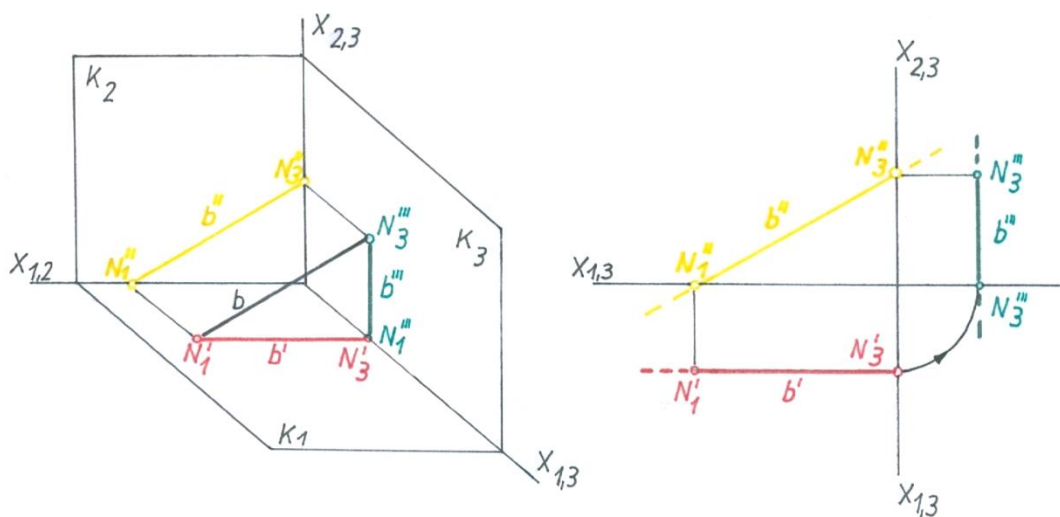
4.8.ábra általános helyzetű egyenes ábrázolása [2]

Az egyenest minden esetben két képével ábrázoljuk. A egyenest kisbetűvel jelöljük, de megadhatjuk két tetszőleges pontjával amit nagybetűvel vagy, számokkal is megadhatunk. Az általános helyzetű egyenes egy olyan egyenes, mely mindhárom képsíkkal szöget zár be. Ebből következik, hogy egyik képsíkon sem az egyenesnek valódi hosszát látjuk. a valódi hossz meghatározásához új képsíkot kell létrehozni, melyet egy másik fejezetben tárgyalunk.

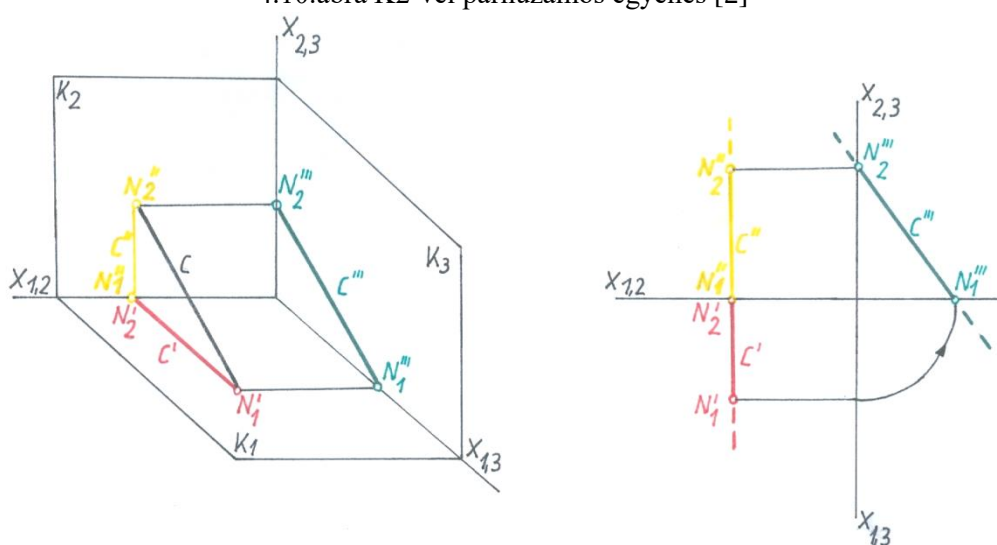
Ha egy térbeli egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor a valódi hossza azon a képsíkon meghatározható. A másik két vetülete a képsíkokkal felvett általános helyzete miatt nem a valódi hosszát adja.



4.9.ábra K1-el párhuzamos egyenes [2]

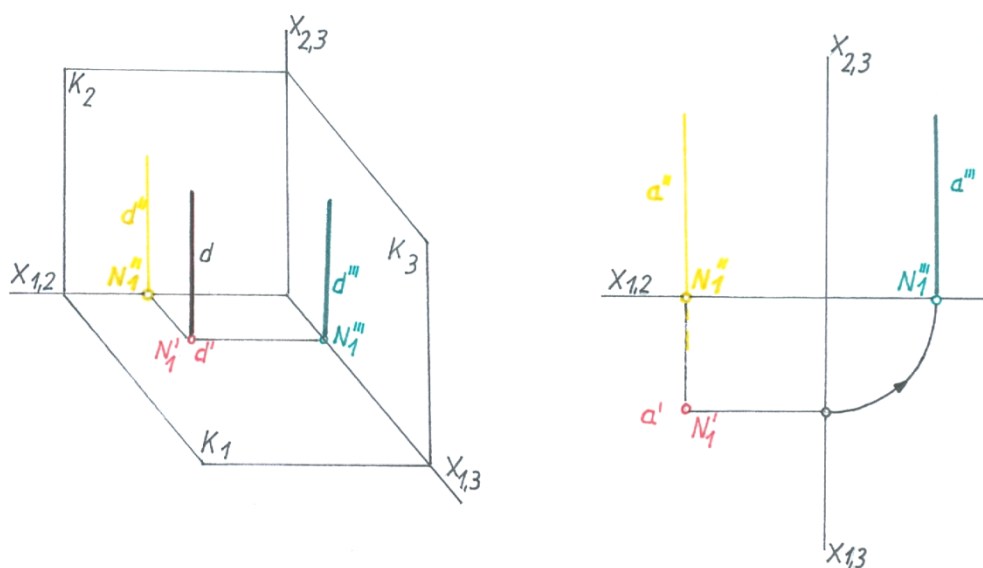


4.10.ábra K2-vel párhuzamos egyenes [2]

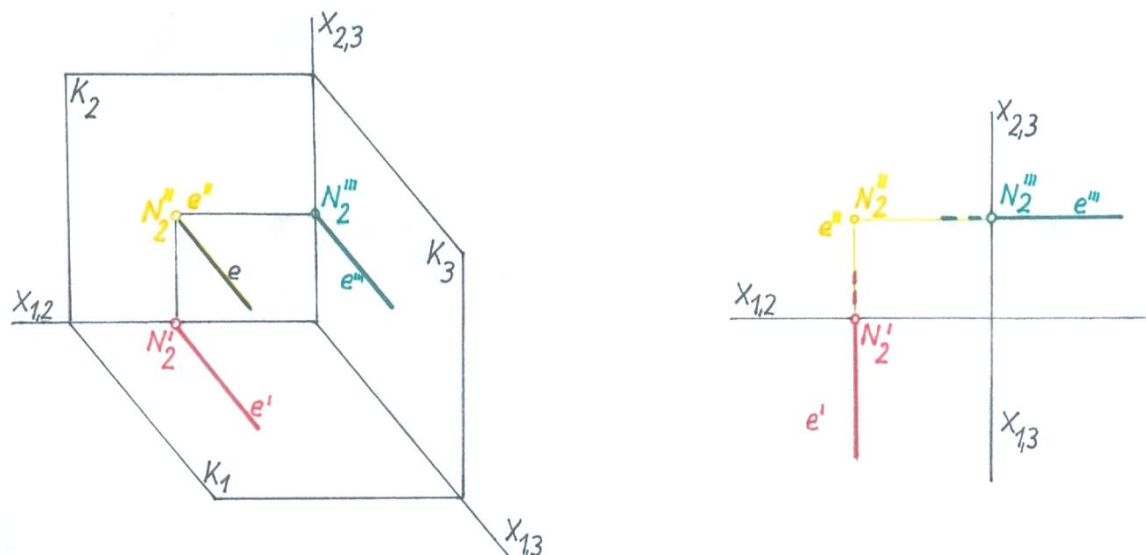


4.11.ábra K3-al párhuzamos egyenes [2]

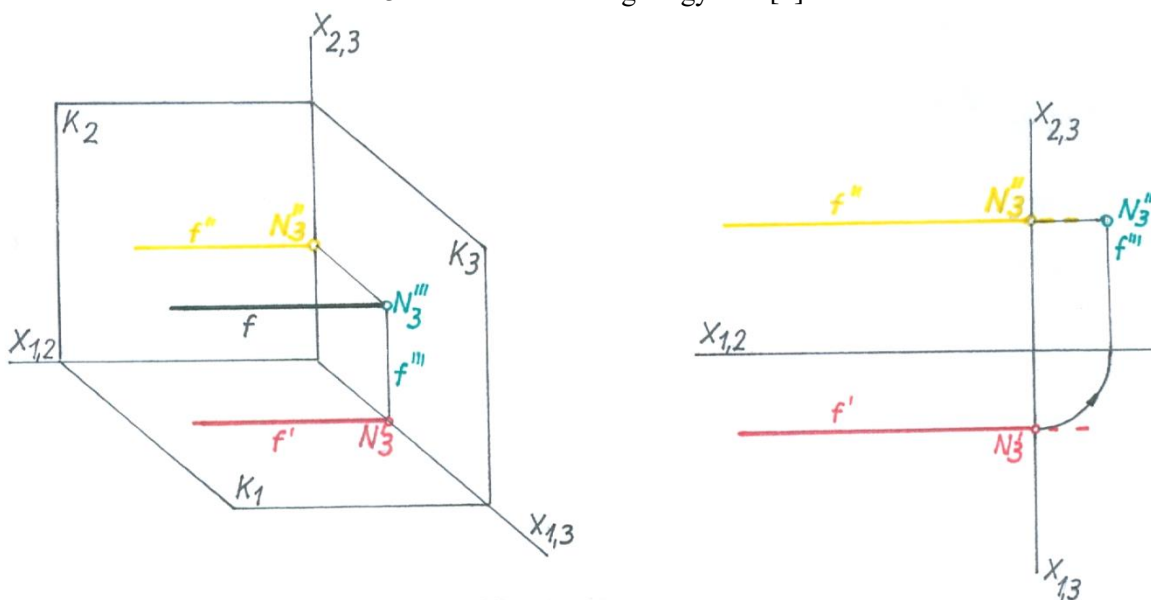
A képsíkra merőleges térbeli egyenes vetületei közül két képsíkon (azokkal a képsíkokkal, melyekkel párhuzamos helyzetet vesz fel), a valódi hosszát határozhatjuk meg. Ekkor az egyenes vetülete két képsíkon is egyenes lesz. Azon a síkon melyre merőleges, pontként ábrázoljuk, amely egyben az egyenes nyompontja is.



4.12.ábra K1-re merőleges egyenes [2]



4.13. ábra K2-re merőleges egyenes [2]



4.14. ábra K3-re merőleges egyenes [2]

4.1.5. Két térbeli egyenes kölcsönös helyzete

4.1.5.1. Metsző egyenesek

Két térbeli egyenes, ha metszi egymást: akkor minden meghatározott képsíkon lévő vetületeik is metsződnek (4.15.a ábra). Tulajdonsága, hogy a metszéspont első képe egybe esik a második képsíkbeli vetületével. A metszéspontokat összekötő vetületrendező merőleges a képtengelyre. Ha metsző egyenesek közül legalább az egyik profilegyenes, akkor meg kell rajzolni az egyenesek harmadik vetületeit is.

4.1.5.2. Párhuzamos egyenesek

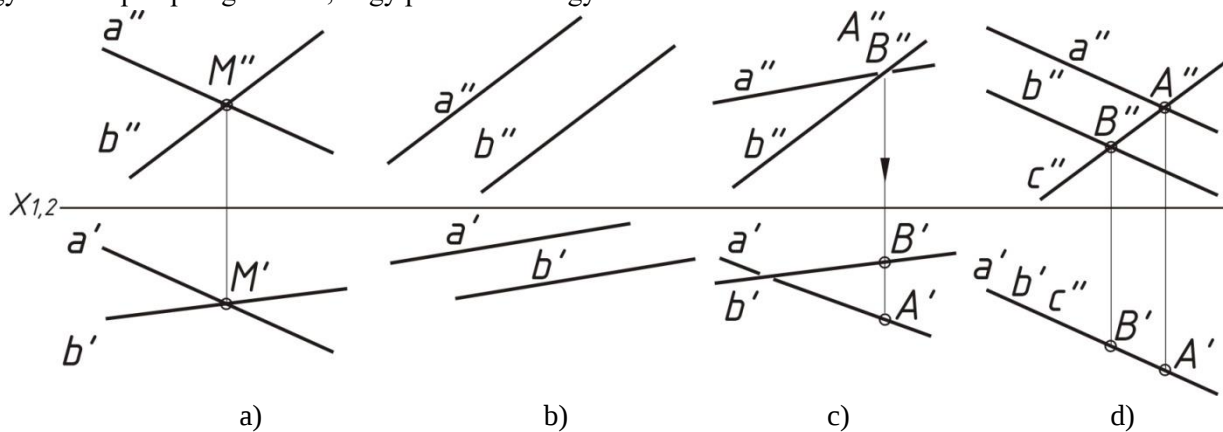
A térbeli párhuzamos egyenesek azonos indexű vetületei is párhuzamosak. Profilegyenesek esetében is fel kell használni a harmadik vetületet (4.15. b. ábra).

4.1.5.3. Kitérő egyenesek

Az olyan térbeli egyeneseknek, melyeknek nem párhuzamosak és nincsen közös pontjuk kitérő egyeneseknek nevezzük (4.15. c. ábra). Tulajdonságuk, hogy a képeiket a metsző egyeneshez hasonlóan kell ábrázolnunk: de a látszólagos metszéspontjukat összekötő egyenesek nem esnek egy vetületrendezőre. A kitérő egyenesek láthatóságát is fel kell tüntetni. Ezek eldöntésére a fedőpontpárak módszerét alkalmazzuk.

4.1.5.4. Fedőegyenesek

Ha két vagy több egyenes takarja egymást a képsíkhoz viszonyított helyzetében, akkor fedőegyenesnek nevezzük (4.15.d.ábra). A képsíkhoz viszonyított helyzetükhöz képest megkülönböztetünk: első, második, stb. fedőegyeneset. Az első fedőegyenesnek első, a második fedőegyenesnek második képe esik egybe. A nem egybeeső képek pedig metsző, vagy párhuzamos egyenesek.



4.15.ábra [2]

4.2. Síkok ábrázolása

A síkot csak az öt meghatározó elemeivel ábrázoljuk, mert a sík végtelen kiterjedésű és vetületeivel bármely képsíknak bármely pontját lefedné ha vetületeivel ábrázolnánk: ezért nem lehetne megkülönböztetni melyik az ábrázolt sík pontja és a képsík pontja.

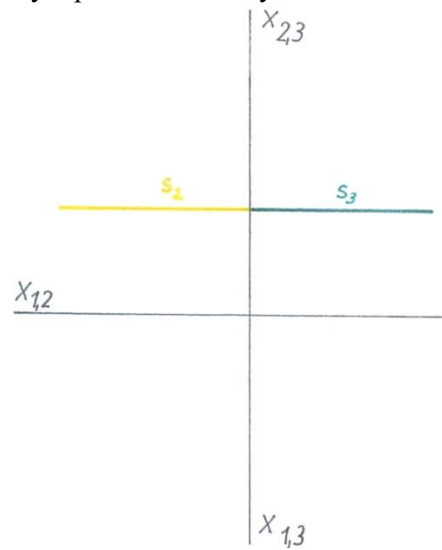
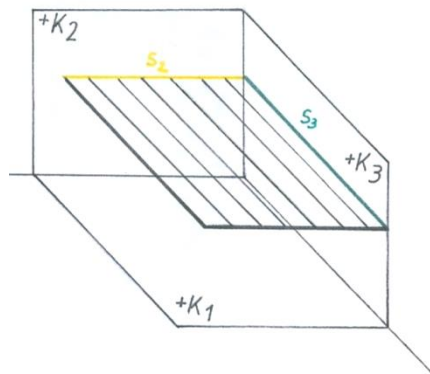
A sík meghatározására a 2.1. pontban említett axiómák segítenek. A síkot és annak térbeli helyzetét meghatározza:

- Három nem egy egyenesbe eső pont.
- Két párhuzamos egyenes.
- két metsző egyenes.
- Egy egyenes és egy rajta kívül eső pont.

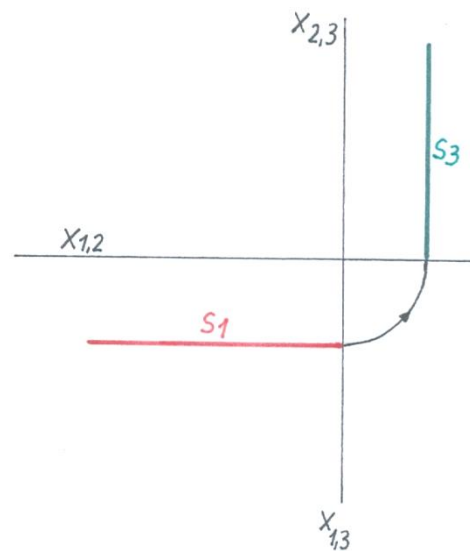
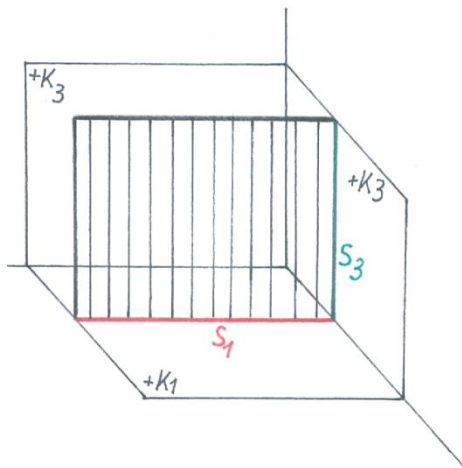
A síkot megadhatjuk nyomvonalával is mely a sík és a képsík metszésvonalából jön létre. Jele: „ n ” vagy „ s ”. A sík jele: $A, B, N, S, \dots$ nyomtatott nagybetűk vagy a görög abc kisbetűi.

4.2.1. Fősíkok

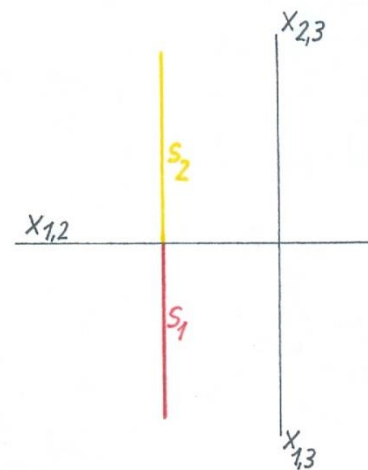
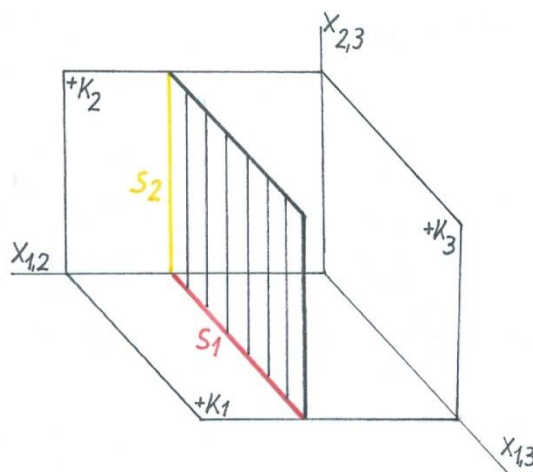
Egy fősíк tulajdonságát az a sík határozza meg, mellyel párhuzamos helyzetet vesz föl.



4.16.ábra Első fősíк [2]



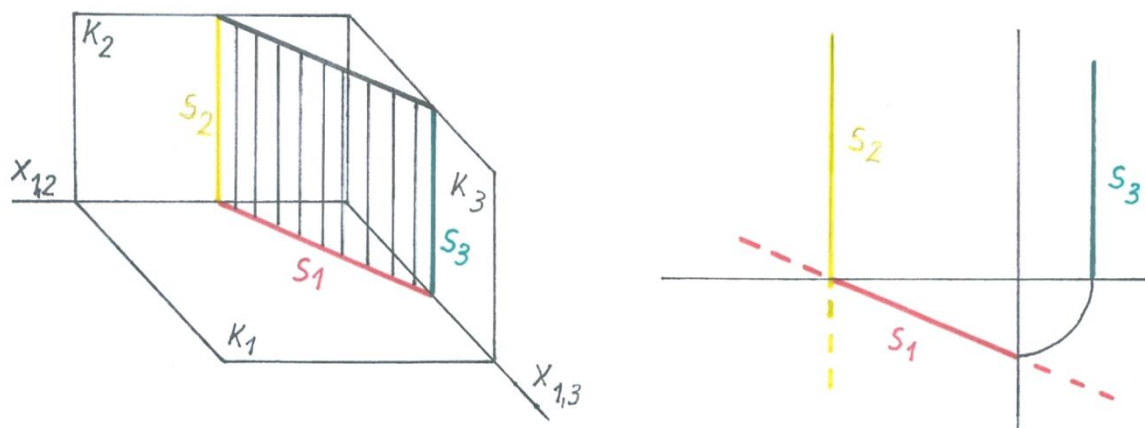
4.17.ábra Második fősíк [2]



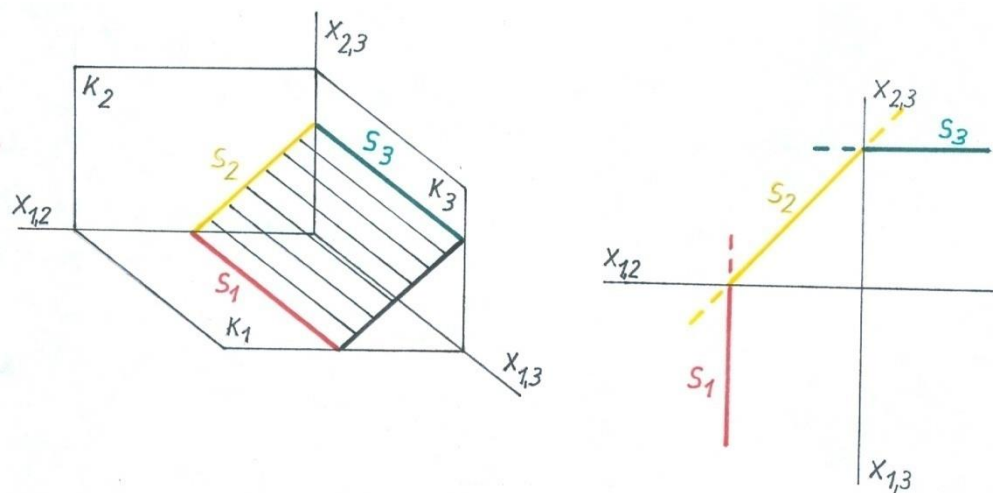
4.18.ábra Harmadik fősíк [2]

4.2.2. Vetítősíkok

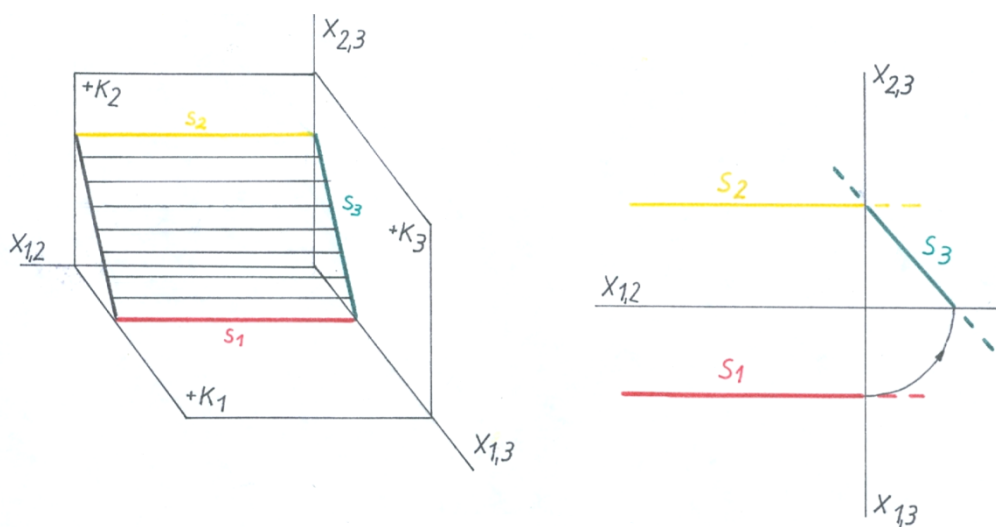
Egy vetítősík tulajdonságát az a sík határozza meg, mellyel merőleges, míg a másik két síkkal általános helyzetet vesz föl.



4.19.ábra Első vetítősík [2]



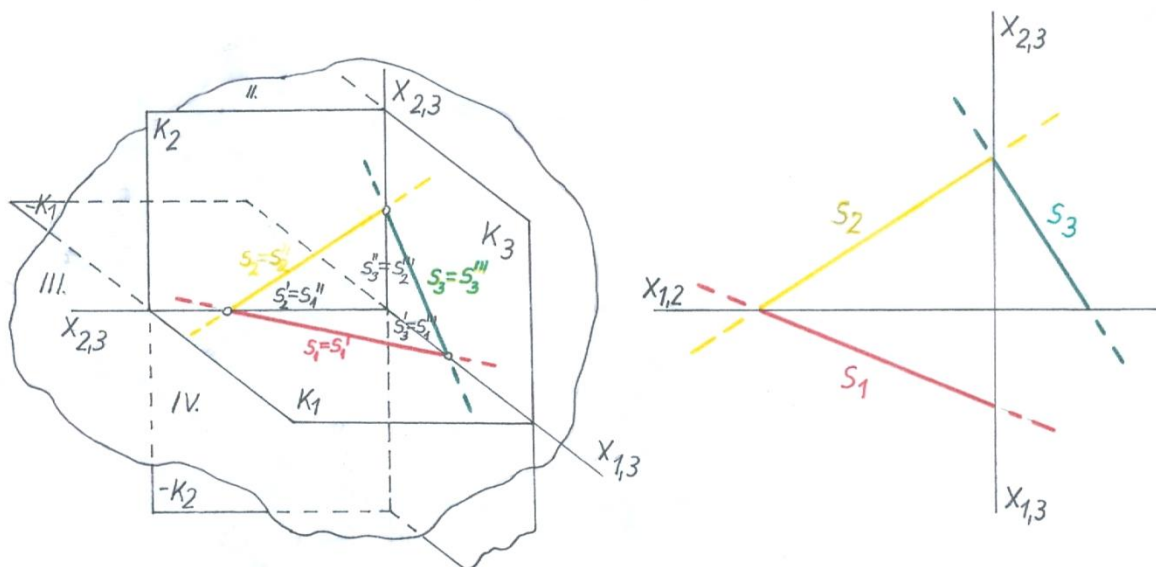
4.20.ábra Második vetítősík [2]



4.21.ábra Harmadik vetítősík [2]

4.2.3. Általános helyzetű síkok

4.3.2.1. Dőlt sík



4.22. ábra Általános helyzetű dőlt sík ábrázolása nyomvonalával [4]

Minden sík ábrázolásánál elmondhatjuk, hogy a sík és az első képsík metszéspontját *első nyomvonalnak*, (n_1, s_1) ; második képsíkkal alkotott metszéspontját második nyomvonalnak (n_2, s_2) nevezzük, stb. A síknak bármely nyomvonala képsíkon fekvő egyenes, ezért annak egyik képe egybeesik a kérdéses nyomvonallal a többi képe pedig a képtengelyen vannak. A nyomvonal képeit nem szoktuk jelölni, csak a képsíkon keletkező nyomvonalat.

A két nyomvonal (s_1, s_2) mindig a képsíktengelyen metszi egymást. Pozitív és negatív résszel is rendelkezik. A sík is különböző helyzeteket vehet fel. Erre már láthatunk az előzőekben példát a fő- és vetítősíkok esetében.

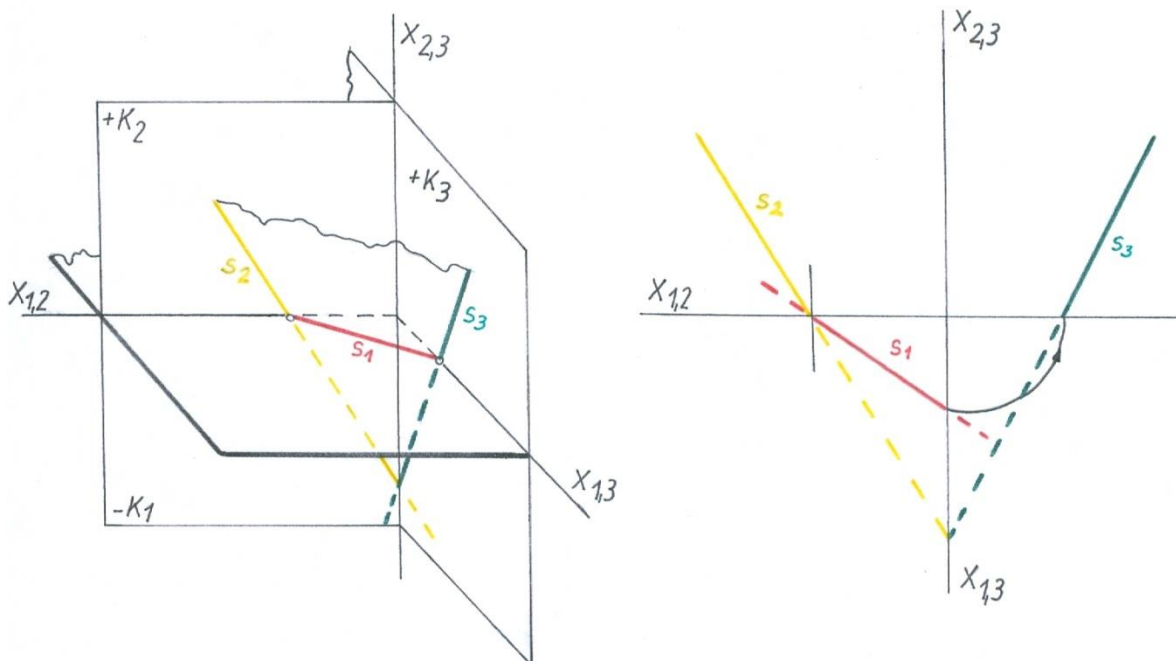
Az 4.22. ábrán látható a dőlt sík, melynek tulajdonsága:

- a képsíkok felé dől (K_2, K_3), azaz azokkal valamilyen ferde szöghelyzetet vesz föl.
- minden helyzetben ugyanazt az oldalát láthatjuk,
- a rajta elhelyezkedő alakzatnak (pl.: háromszög) a csúcsainak körbejárási iránya minden képsíkon lévő merőleges vetületen megegyezik (4.24. ábra).

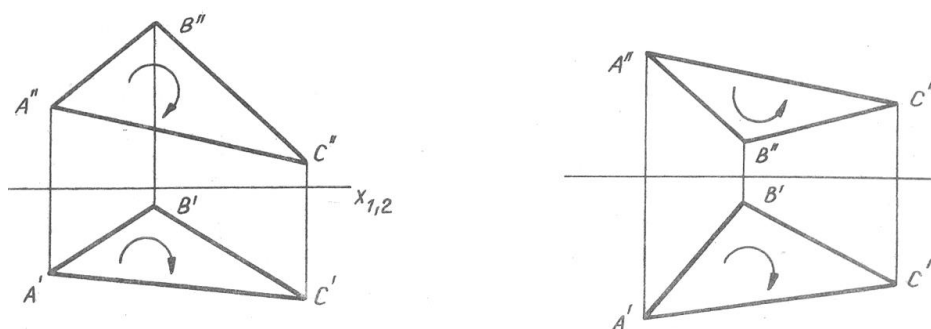
4.3.2.1. Feszített sík

Az 4.23. ábrán látható a feszített sík, melynek tulajdonsága:

- a sík a képsíkoktól (K_2, K_3) elfelé dőlve veszi fel az általános ferde szöghelyzetet,
- Felülnézetben az belső, előlnézetben az első oldalát láthatjuk,
- A rajta elhelyezkedő poligon csúcsainak körbejárási iránya ellentétes az első és a második képsíkon.



4.23. ábra Feszített sík ábrázolása [4]



4.24. ábra Dőlt- és feszített képsíkot meghatározó poligonok [2]

4.3. A sík különleges helyzetű egyenesei

4.3.1. Horizontális fővonal

A sík minden pontján átmegy egy olyan egyenes, amely a K_1 , K_2 , K_3 , stb. képsíkokkal párhuzamos helyzetű. Ezeket az egyeneseket az adott síkból a kérdéses képsíkkal párhuzamos helyzetű sík metszi ki. Nevük: *fővonalak*.

Közös tulajdonságuk: Bármely fővonal egyik képe a vele egyenévű nyomvonallal, a másik képe pedig a képtengellyel párhuzamos. A sík első képsíkkal párhuzamos helyzetű egyeneseit a sík első fővonalainak (horizontális) nevezzük. Jele: „ h ”.

Az első fővonal (4.25. ábra) első képe párhuzamos az első nyomvonallal, második és harmadik képe párhuzamos az $x_{1,2}$; ill. az $x_{1,3}$ tengellyel.

4.3.2. Vertikális fővonal

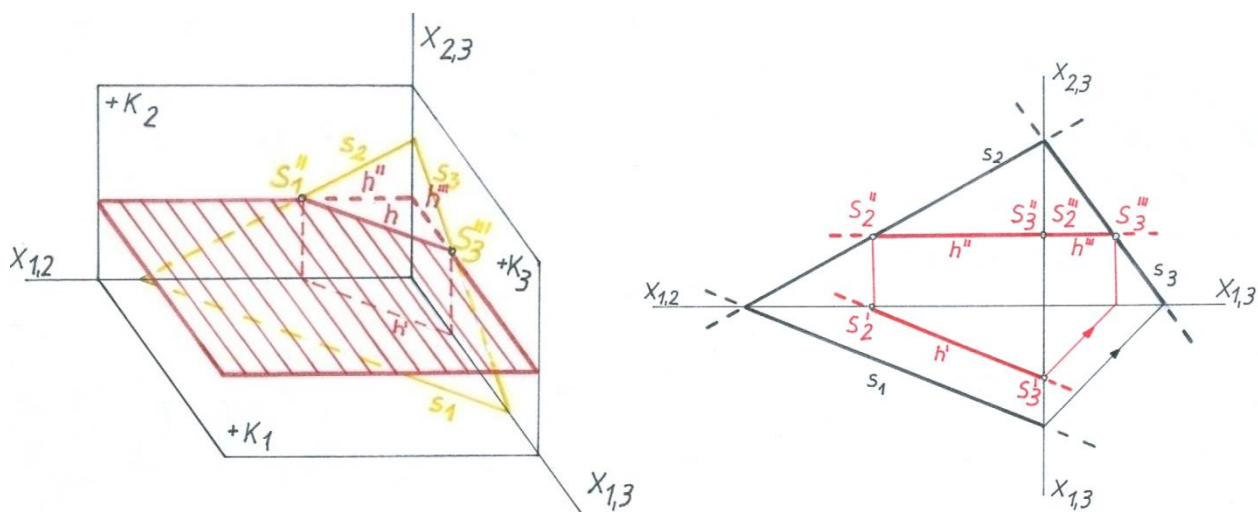
A sík második képsíkkal párhuzamos egyeneseit a sík második fővonalainak nevezzük. Jele: „ v ” (A vertikális szó kezdőbetűjeként, miután a „függőleges” sík metszi ki.). A második fővonal második képe a sík második nyomvonala, első képe az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamos. (4.26. ábra). Figyelembe véve a fővonalak e tulajdonságait, két metsző egyenesével adott síkban tetszőlegesen az első fővonal második képét és a második fővonal első képét vehetjük fel, természetesen az $x_{1,2}$ tengellyel párhuzamosan. Ha a síkban pontot

kell ábrázolnunk, akkor általában mindig első, vagy második fővonalat használjuk, mert a szerkesztés egyszerűbb.

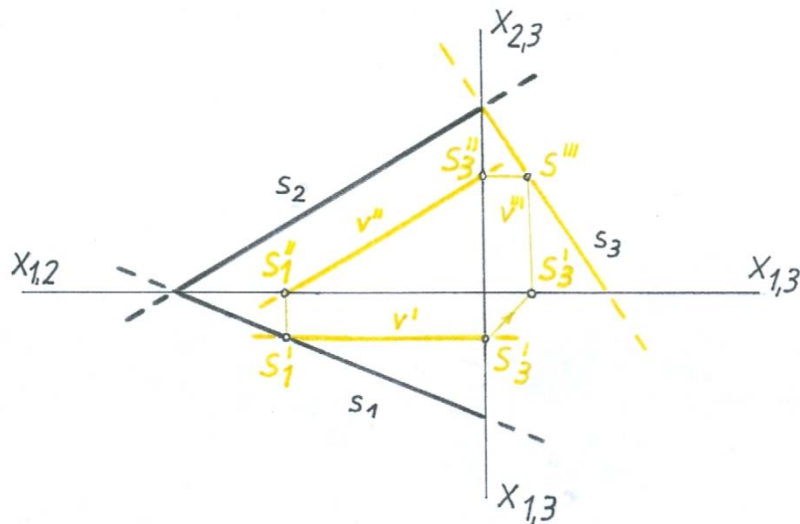
4.3.3. Esésvonalak (lejtővonalak)

Ha egy síklap a vízszintes síkhoz szög alatt hajlik, lejtő keletkezik. Tegyük a lejtőre (sík) egy golyót (P) és engedjük el. Legurul, s ha jól megfigyeljük, látjuk, hogy a gurulás iránya merőleges a sík nyomvonalára (fővonalaira). A golyó haladási irányát, ill. a sík mindazon egyeneseit, amelyek a sík nyomvonalaira merőlegesek, esésvonalnak nevezzük. Jele: e_1, e_2 , stb. Közös tulajdonságaik: bármely esésvonal egyik képe a vele egynevű nyomvonalra merőlegesen áll, a hiányzó képeket a nyompontokon határozzák meg.

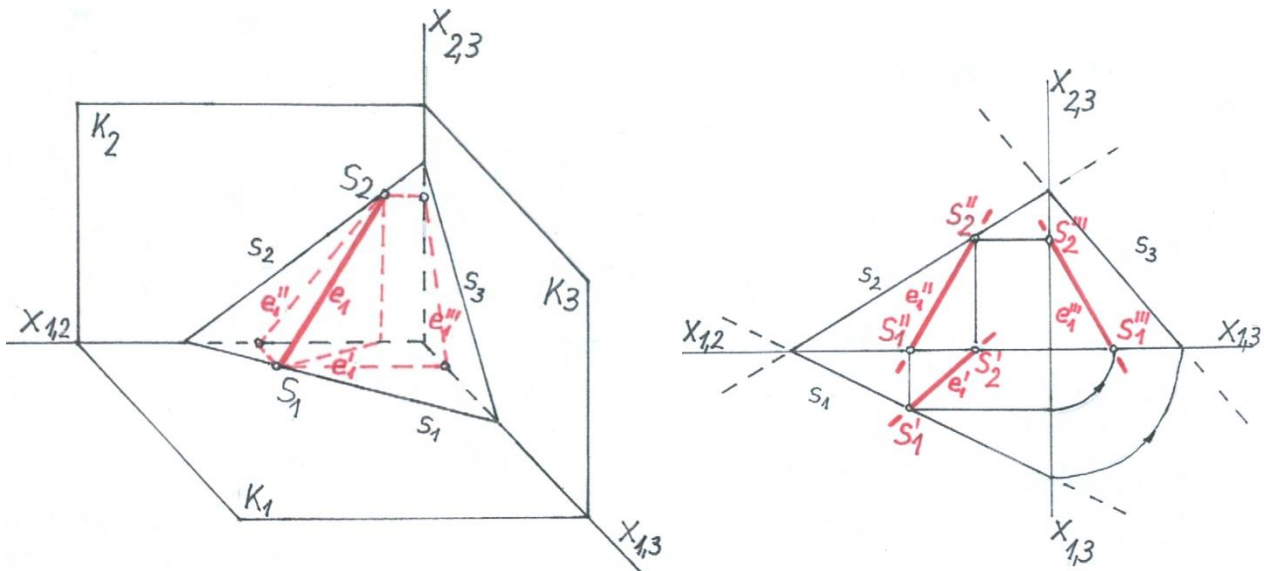
Az 4.27. ábra egy első esésvonal szerkesztését, az 4.28. ábra pedig egy második esésvonal képeinek szerkesztését mutatja be. (A második esésvonalnak nincs fizikai jelentése).



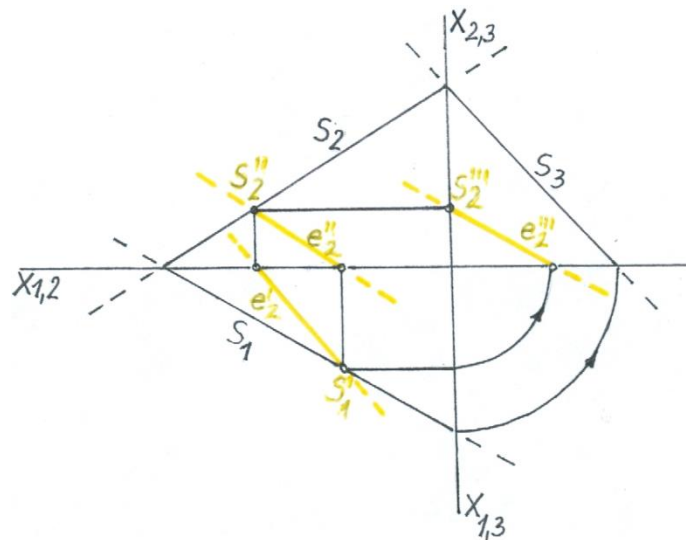
4.25. ábra. Horizontális fővonal [4]



4.26. ábra. Vertikáli fővonal [4]



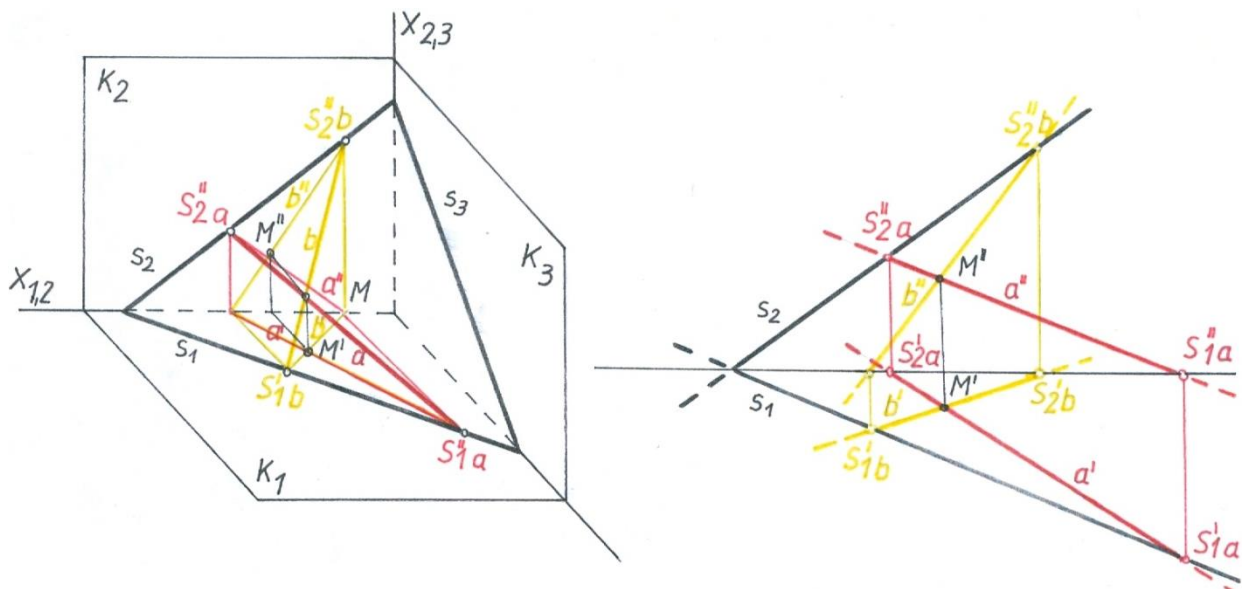
4.27. ábra. Első esésvonal [4]



4.28. ábra. Második esésvonal [4]

4.4. Példák a síkban fekvő egyenesekre és pontokra

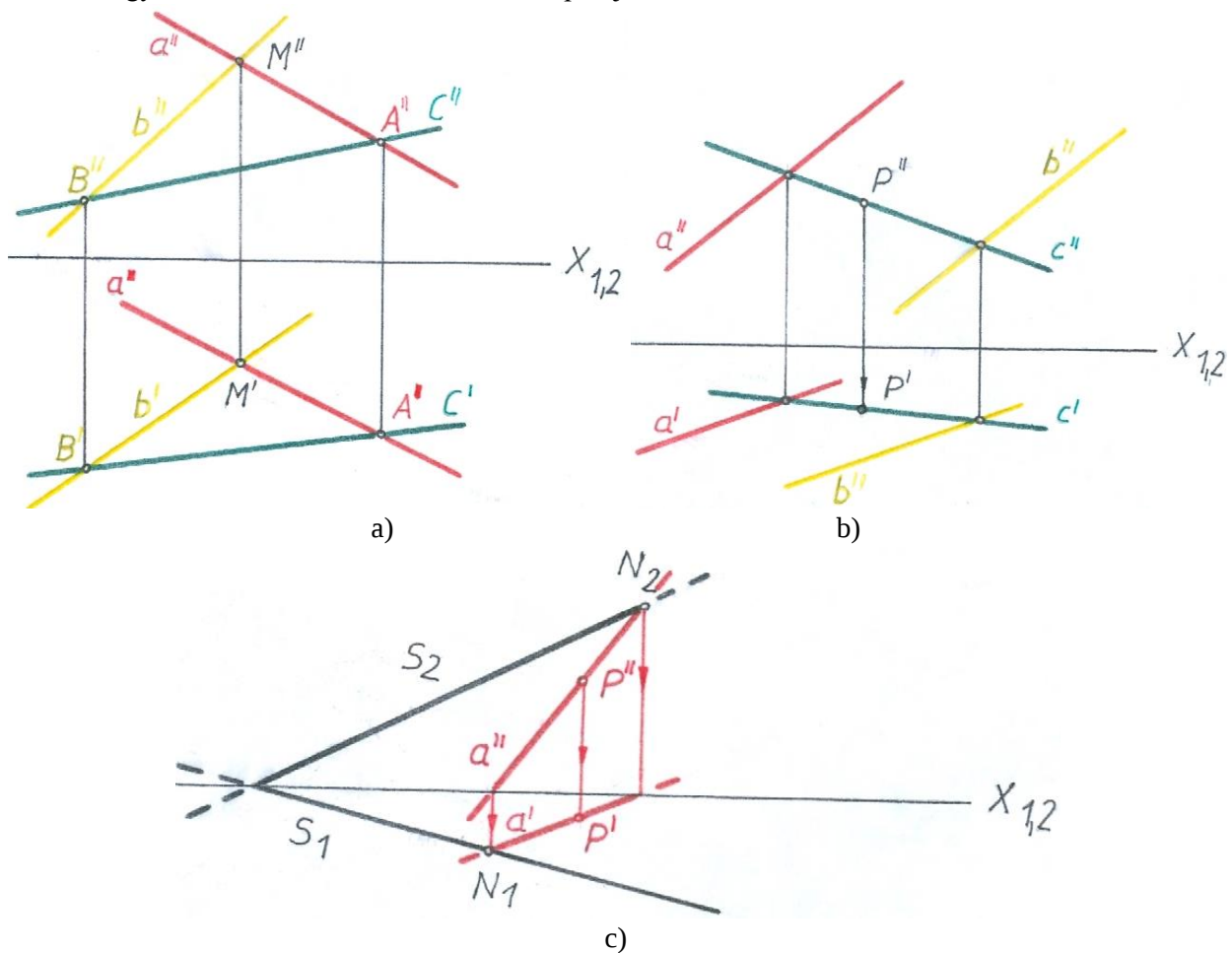
Adott a sík két metsző egyenesével és annak első és második képeivel (a' , a'' , b' , b''). A metsző egyenesek első és második képeit addig hosszabbítjuk meg, míg el nem metszik a képtengelyt. A nyomvonalak metszést alkotnak a tengellyel, ahol megkapjuk az adott képekhez tartozó nyompontok első és második képet. Ezeket a megfelelő képre átvetítve a vetületrendező kimetszi az aktuális nyomponthoz tartozó egyenesen a keresett nyompontot. Végül a két eltérő egyenes azonos indexű pontjait összekötjük mindkét képen, melyek nem a képtengelyre esnek. Így kapjuk meg a sík nyomvonalait és meghatározhatjuk a sík tulajdonságait (4.29. ábra).



4.29.ábra Általános helyzetű dőlt sík szerkesztése metsző egyenesek segítségével [2]

Síkban fekvő pont, egyenes képei egymáshoz képest nem függetlenül helyezkednek el. Ezért akár az egyenes, akár a pont két képe közül csak az egyiket vehetjük fel tetszés szerint, a másik képét kötött szabályok figyelembevételével kell megszerkeszteni:

- I. A pont akkor illeszkedik a síkon, ha rajta van egy síkban fekvő egyenesen.
- II. Az egyenes akkor fekszik a síkon, ha két pontja benne fekszik a síkban.



4.30.ábra Síkban fekvő egyenesek és pontok [2]

Az 4.30. a) ábrán adott egy sík két térbeli metsző egyenesével a' és b' első és második képeivel. Ezekre illeszkedik egy harmadik c'' egyenes. Keressük a c' egyenes első képét. A c' egyenes az a'' és b'' képein metszéspontokat hoz létre (B'' , A''). A kapott pontokat merőlegesen a képtengelyen keresztül az egyenesek első képeire vetítjük és ezzel megkapjuk a segédpontok hiányzó első képeit. Majd a segédpontok első képeinek összekötésével kapjuk meg a c' -t.

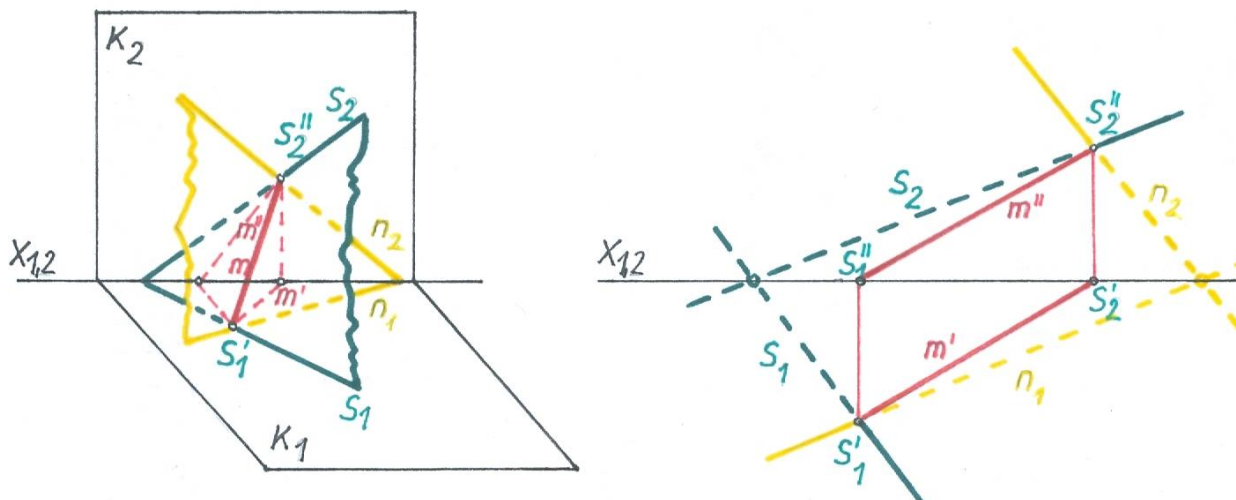
Az 4.30. b) ábrán adott egy sík két párhuzamos egyenesével. A síkra illeszkedik egy P'' pont. A pont első képét ebben az esetben egy tetszőlegesen felvett c'' egyenes segítségével szerkesztjük meg, oly módon, hogy a c'' segédegyenes illeszkedik a P'' -re és metszéspontokat hoz létre a két másik egyenessel. A segédpontok hiányzó első képeit a merőleges vetítők segítségével megszerkesztjük, majd azokat összekötve megkapjuk c' -t. Végül a P'' -t levetítjük a c' -re és megkapjuk P' -t.

Az 4.30. c) ábrán nyomvonalával adott egy általános helyzetű dőlt sík. Arra illeszkedik egy pont második képével. A feladat megoldása az előző gondolatmenet alapján történik.

5. SÍKOK METSZÉSVONALÁNAK MEGHATÁROZÁSA

5.1. Két sík metszésvonala

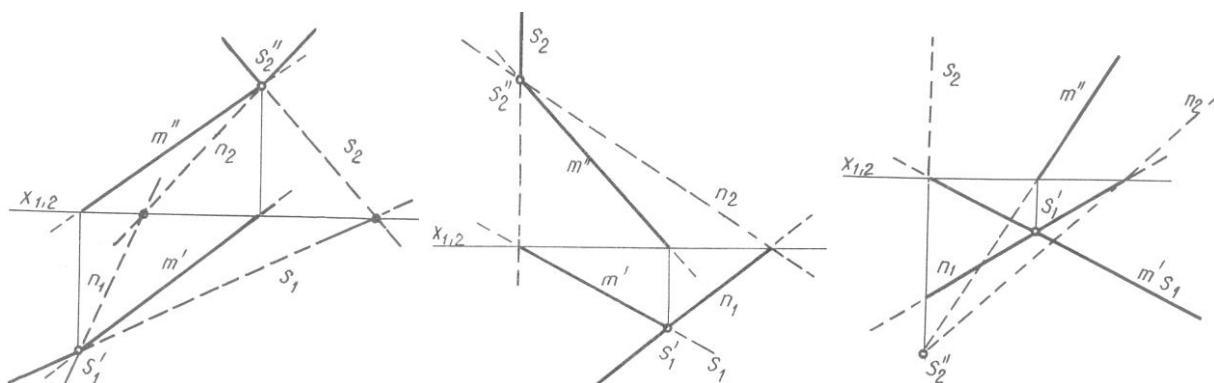
Két sík egymást egy egyenesben metszi. Ezt az egyenest a két sík metszésvonalának nevezzük. Megszerkesztéséhez elegendő bármely két pontjának meghatározása.



5.1. ábra [4]

A metszésvonal megszerkesztése akkor a legegyszerűbb, ha a síkok nyomvonalakkal adottak. Ekkor ugyanis az egyenű nyomvonalak metszéspontjai adják a metszésvonal két pontját. (A nyompontjait). Tehát: a metszésvonal első nyompontja S_1 mindkét sík első nyomvonalára, a második nyompontja S_2 pedig mindkét sík második nyomvonalára illeszkedik. A nyompontok egyenű képeinek összekötése m' -t, ill. m'' -t, vagyis a metszésvonal két képét adja.

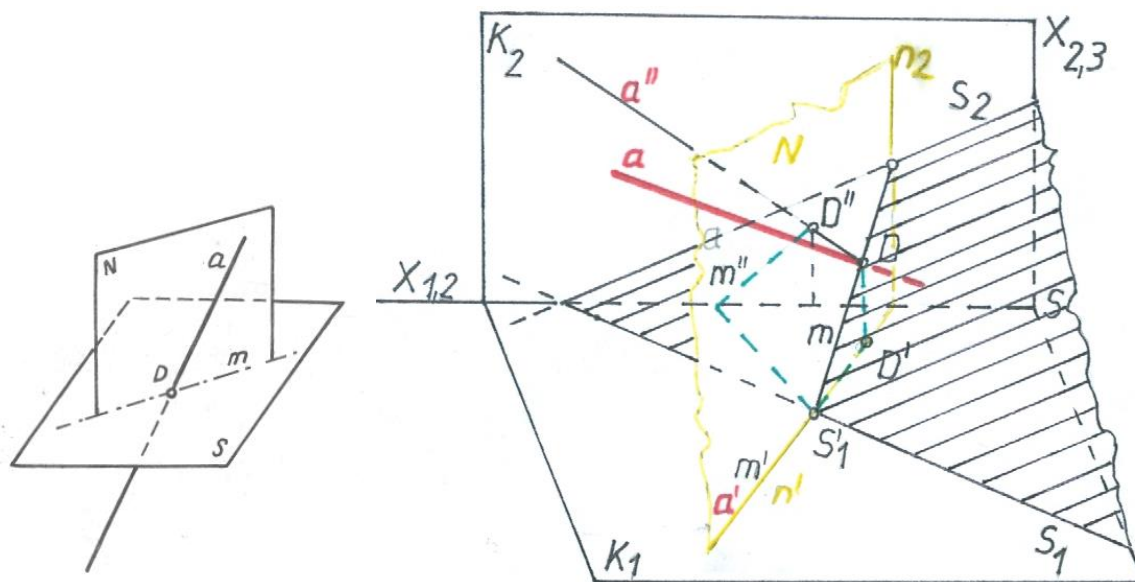
A következő ábrák néhány metszésvonal szerkesztését mutatják, és egyszerűségükönél fogva nem igényelnek magyarázatot sem.



5.2. ábra. Feszített sík - dőlt sík, első vetítősík - dőlt sík, első vetítő sík - feszített sík [4]

5.2.Egyenes és sík metszéspontja

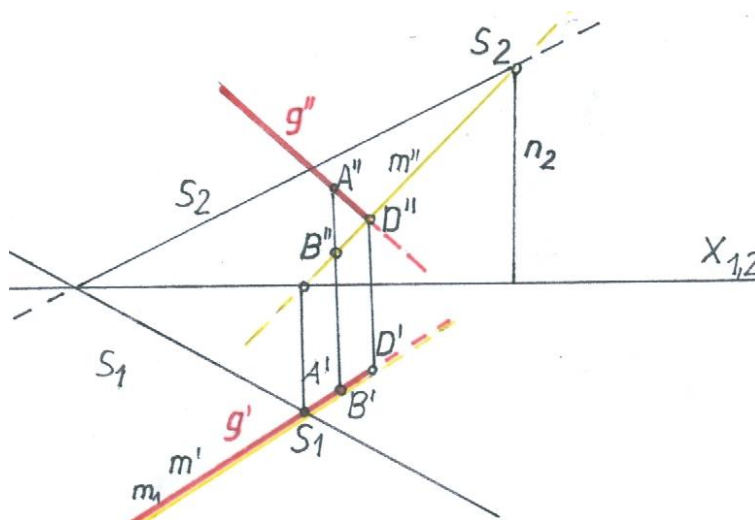
Egyenes és sík metszéspontjának nevezzük az egyenes és sík közös pontját. Ezt a közös pontot nem tudjuk közvetlenül meghatározni. Minden esetben az adott 'S' síkban keresnünk kell egy olyan egyenest, amely az adott térbeli egyenest metszi. Ilyen egyenes az adott síkban számtalan van. Ezért az adott egyenesen át egy tetszés szerinti 'N' segédsíkot fektetünk és először megszerkesztjük e segédsík és az adott sík metszévonalát m -ben. A metszévonal és az adott térbeli egyenes metszéspontja adja az adott egyenes és sík 'D' dőféspontját (5.3.ábra).



5.3.ábra [2]

A segédsík, amely az adott egyenesen áthalad, bármilyen helyzetű lehet, de a gyakorlatban rendszerint vetítősíkot alkalmazunk, mert a vetítő síkban fekvő egyenesek egyik képe egybeesik a sík nyomvonalával; azaz az adott térbeli egyenes és a metszésvonal fedő-egyenest alkot.

Pl. Adott egy dőlt sík a nyomvonalával és egy F , egyenes a két képével. Szerkesszük meg az egyenes és sík dőléspontját. Megoldás: Felveszünk a ' g ' egyenesen áthaladó első vetítősíkot. E vetítősík első nyomvonala n_1 a ' q '-be esik, második nyomvonala n_2 merőleges az x_{12} tengelyre.



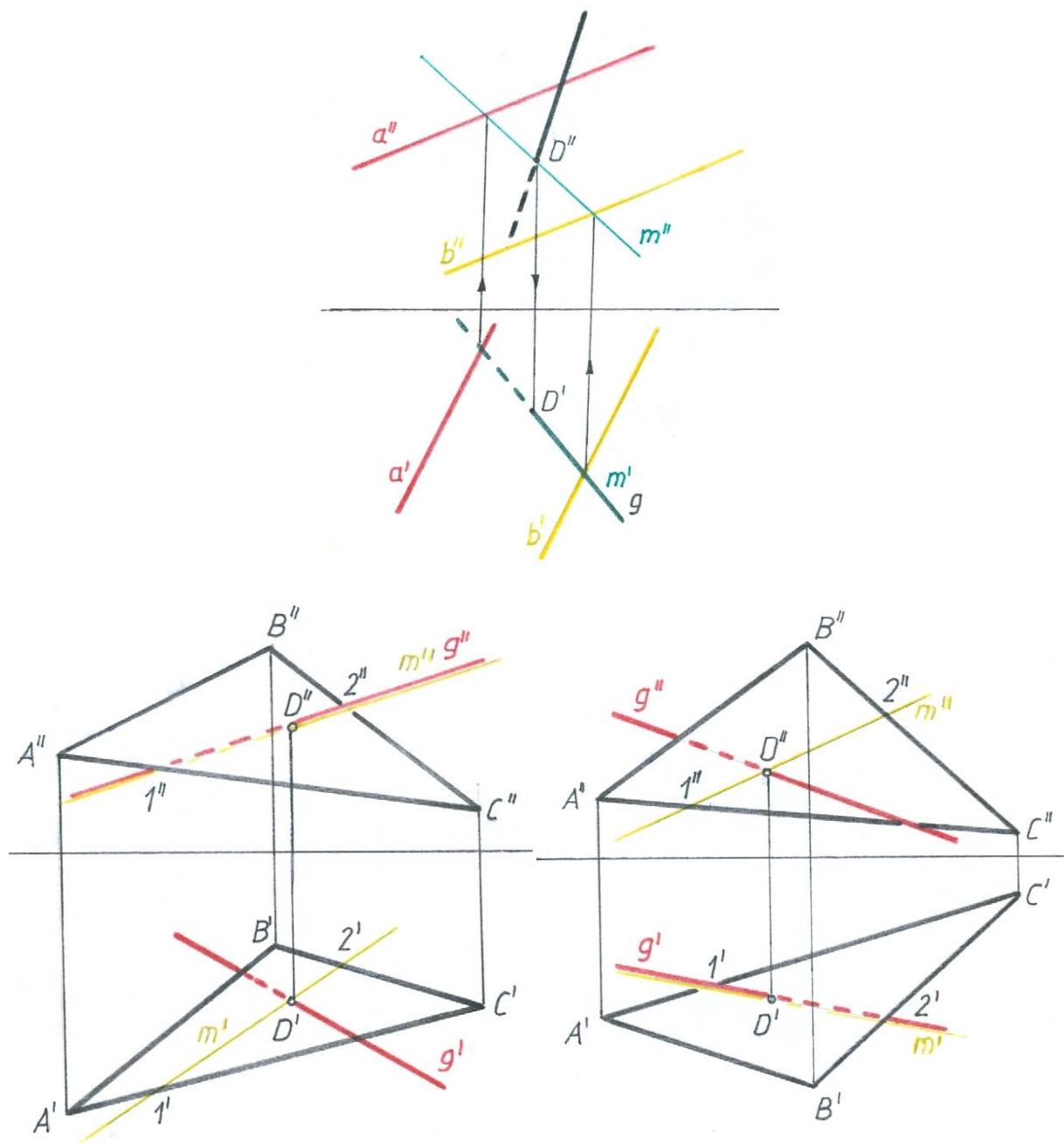
5.4.ábra [2]

A nyomvonalak metszéspontjai adják a metszésvonal nyompontjait. A nyompontok tengelybe eső képei után az egynevű nyompontképek összekötése adja a metszésvonal képeit. Az m' ugyancsak egybeesik g' -vel, m'' -t pedig, mint az adott síkban fekvő egyenes képét, az előzőekben mondott módon szerkesztjük meg. A g'' és m'' metszése adja a keresett dőféspont második képét, D'' -t, az első képet pedig vetítéssel nyerjük.

Minden dőféspont szerkesztés után el kell döntenie a láthatóságot is. Ezt a fedőpontok módszerével tesszük mindkét képen külön-külön. Az egyik fedőpontot A' -t a g' térbeli egyenesen, a másikat, B' -t a síkban fekvő m' egyenesen. A második képeiket vetítéssel nyerjük. Mivel az A'' pont második rendezője nagyobb, ez van "magasabban", tehát ez látszik, de ezzel együtt a g'' egyenes is, a dőféspontig. A dőféspontban viszont átmegy az egyenes a sík másik oldalára és azon túl nem látszik.

A Hasonló eljárással, de második fedőpontpár segítségével állapítjuk meg a második kép láthatóságát is.

A továbbiakban néhány egyszerű dőféspont szerkesztést láthatunk (5.5.ábra). A megoldás minden esetben a fedőegyenes segítségével történt. A láthatóság eldöntésére a fedőpontpárok módszerét alkalmaztuk.

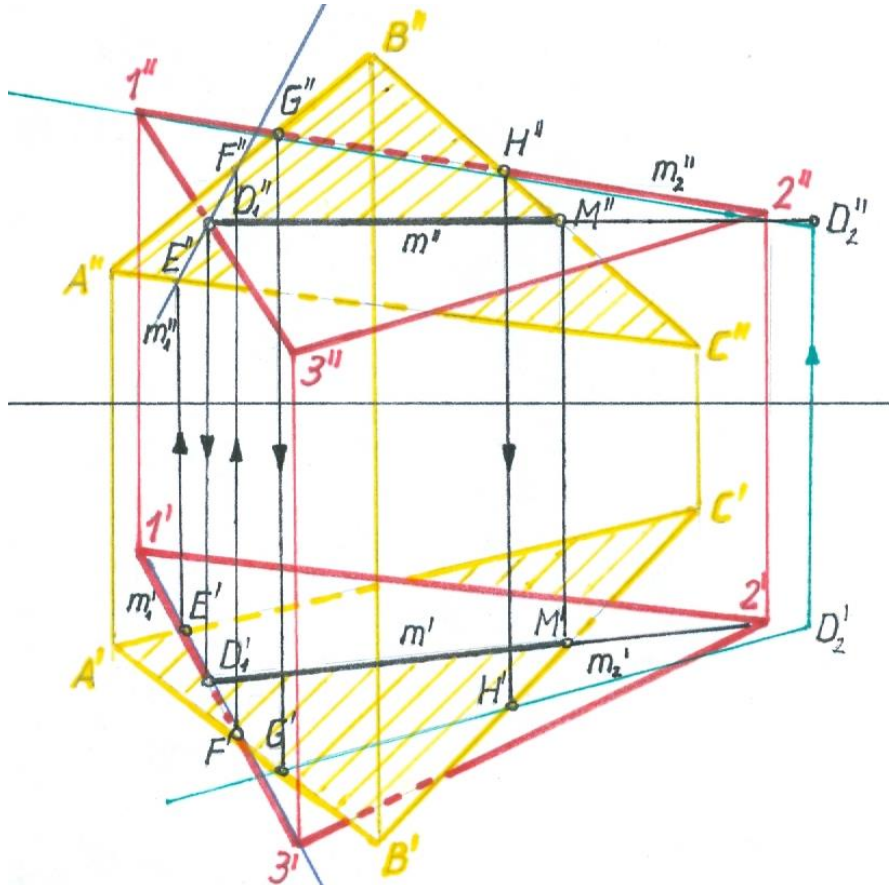


5.5.ábra [2]

5.3 Síkpoligonok áthatása

- Két sík metszésvonala olyan egyenes, amely benne fekszik mind az egyik, mind a másik síkban is, tehát a két sík közös egyenese.
- Ha a közös egyenesnek két pontját meghatározzuk, a két ponton át az egyenes megrajzolható.

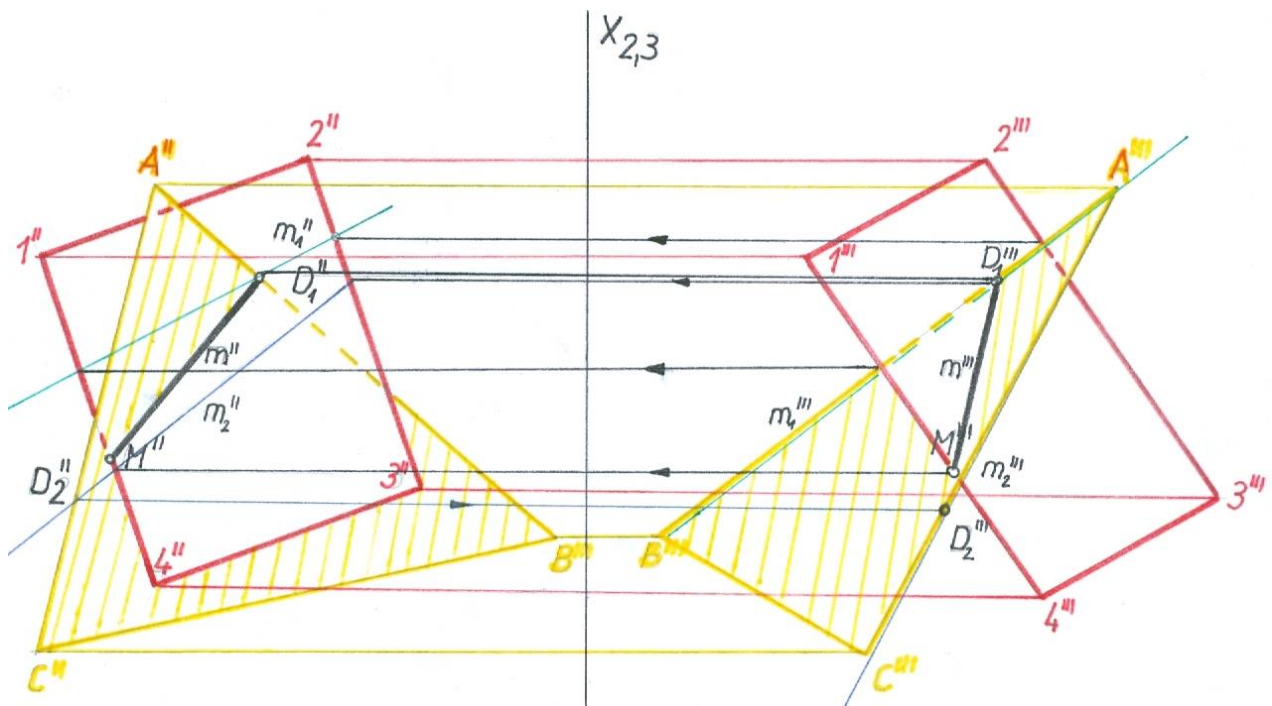
Adott az ABC feszített és az 123 dőlt síkot mutató háromszög két képével. Határozzuk meg a két háromszög síkjának metszésvonalát az 5.6.ábrán.



5.6.ábra. Síkpoligonok áthatása [2]

Az egyik idom bármely oldalának - mint egyenesnek - a másik idom síkjával való metszéspontja a két sík metszésvonalán fekszik. Tehát: két ilyen dőléspont összekötő egyenese adja a keresett metszésvonalat. Célszerű az $1; 2$ és az $1; 3$ oldalaknak az ABC háromszög síkjával alkotott dőléspontjait megszerkeszteni. Első esetben első fedőegyenessel, m_1' -vel kapjuk a D_1'' , második esetben második fedőegyenessel m_2'' -vel a D_2' dőléspont képeit. m_1' -et az E' és F' , m_2'' -t a G'' és H'' illeszkedési pontok segítségével illesztettük a háromszög síkjához. A kapott két dőléspontot összekötő m egyenes adja a két háromszög metszésvonalát. A végtelen hosszú metszésvonalnak bennünket csak az a része érdekel, amelynek mentén a két adott síkidom metsződik. A láthatóság megállapítása itt is a fedőpontok segítségével történik.

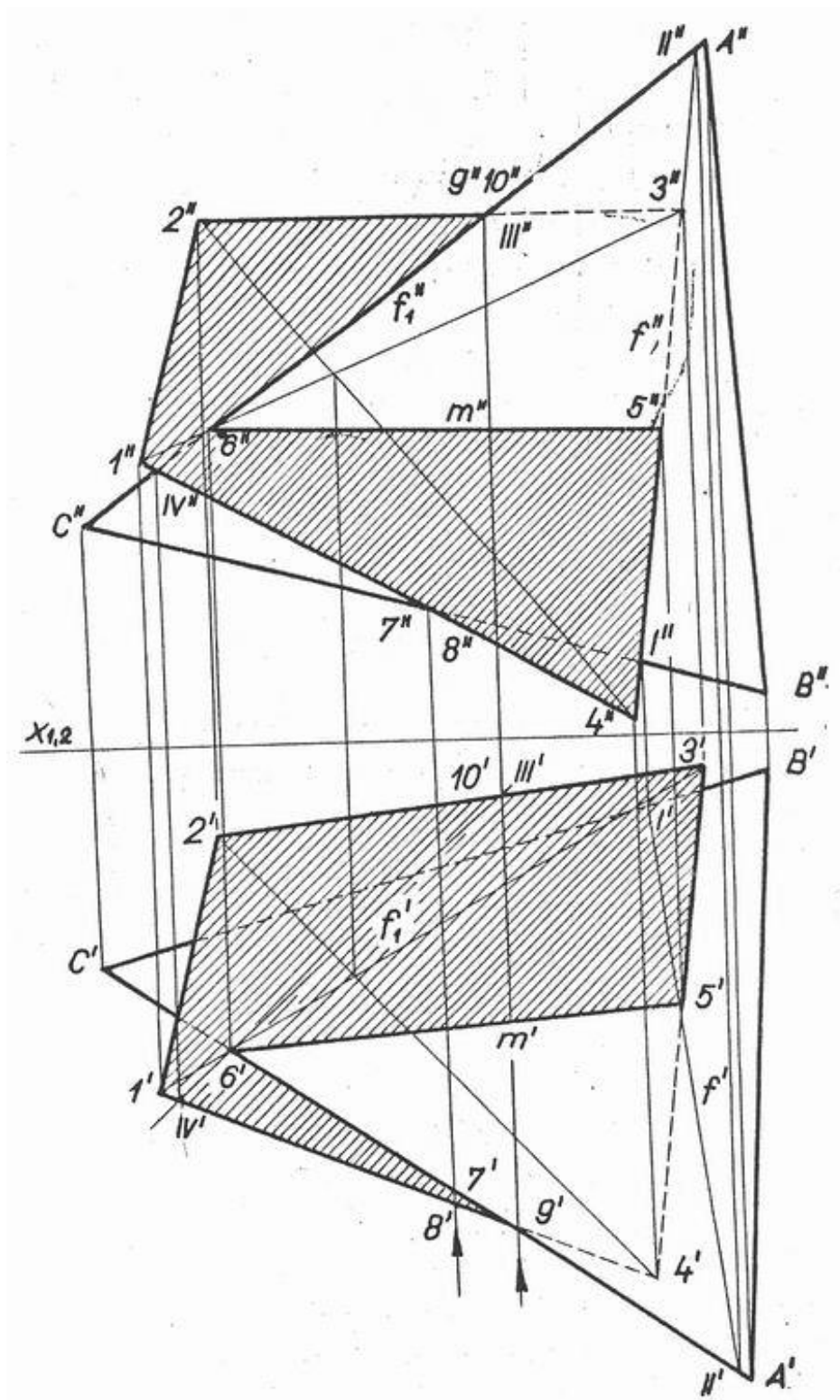
Második és harmadik képeivel adott ABC háromszög és 1234 négyszög áthatásának szerkesztése az 5.7.ábrán. A szerkesztés az előző feladat alapján a dőléspontok meghatározására vezethető vissza és az ábráról leolvasható. A láthatóság eldöntése a fedőpontpárok módszerével eldönthető.



5.7.ábra [2]

Az 5.8. ábrán adott az ABC háromszög és az $1,2,3,4$ négyszög első, második képe. $1,2,3$ -at és a $4''$ -t felvettük, a $4'$ -t átlók segítségével szerkesztettük. Szerkesszük meg a két síkidom metszésvonalát, és tüntessük fel a láthatóságot.

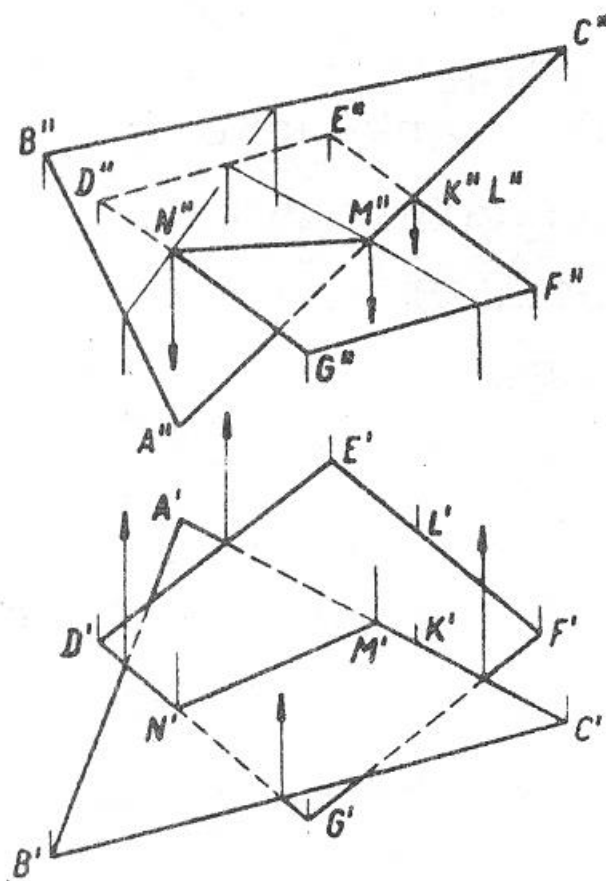
A feladatot a segédegyenesek módszerével oldjuk meg; vagyis kiválasztunk az egyik síkban egy egyenest és megszerkesztjük annak a másik síkkal alkotott dőféspontját. Tekintve, hogy a metszésvonalat - mint egyenest - két pontja határozza meg, az előbbi eljárást megismétljük. Ez utóbbi kiválasztott egyenes lehet ugyanabban, de lehet a másik síkban is. Célszerű a síkidomok oldalainak egyenesét választani. Végezetül a dőféspontok összekötésével kapjuk az m metszésvonal azon szakaszát, amely mindkét határolt idomon rajta van. A példában először a négyszög $4,3$ oldalának egyenesét választjuk ki és keressük a háromszög síkjával alkotott 5 dőféspontját. Az f második fedőegyenest f'' képe azonos $4''3''$ -vel, de f benne van a háromszög síkjában, így a I és II illeszkedési pontok fölhasználásával határozzuk meg f' -t, amely az 5 dőféspont első képét metszi ki. $5''$ -t rendezéssel kapjuk. A metszésvonal további 6 pontját a háromszög A, C oldala és a négyszög síkjának dőféspontja adja, amelyet az f_1 második fedőegyenest alkalmazásával határoztunk meg.



5.7.ábra [1]

Végül a láthatóságot döntjük el. Elég, ha csak két-két oldal térbeli viszonyát tisztázzuk fedőpontokkal. A többi fedés már ebből következik, logikai úton meghatározható.

Adott az 5.9.ábrán két képpével az ABC háromszög és a $DEFG$ síknégyszög. Szerkesszük meg a két síkpoligon metszésvonalát.



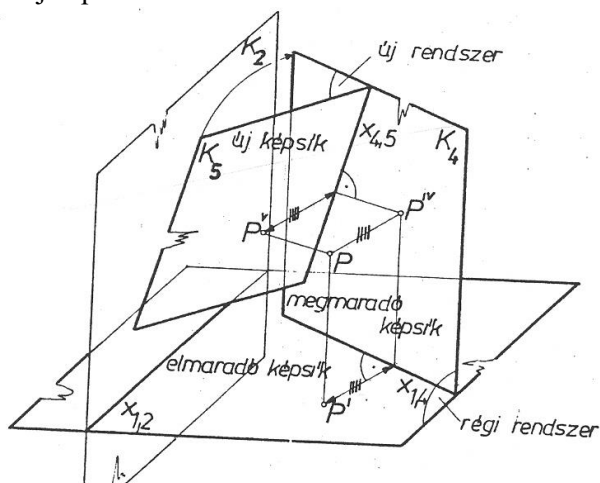
5.9.ábra 1]

A metszésvonal egy-egy pontját az egyik síkidom tetszőlegesen választott oldalegyenesének a másik síkidom síkjával alkotott dőféspontja adja. Metsző egyenesül pl. a háromszög AC , ill. a négyszög DG oldalát választva, a dőféspont szerkesztése a következő. A metszőegyenest vetítősíkot (példánkban első vetítősíkot) illesztünk. Ennek a négyszög síkjával való metszésvonala az AC egyenest az M pontban metszi. Hasonlóképpen a DG -re illesztett vetítősíknak a háromszög síkjával alkotott metszésvonala DG -t az N pontban metszi. Az M és N dőféspontok a keresett metszésvonalakat határozzák meg. A következő lépés a láthatóság megállapítása. A metszésvonal egész szakasza látható. A többi részlet láthatóságát fedőpontokkal (pl. a K és az L) döntöttük el.

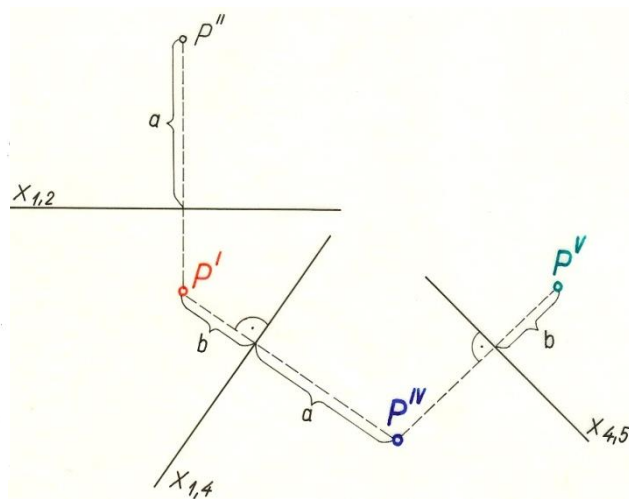
6. TRANSZFORMÁCIÓ

Gyakran előfordul, hogy az eddig tanult K_1 - K_3 képsíkok által létrehozott képek nem adnak tökéletes felvilágosítást az alakzatról annak alak sajátosságairól. E miatt más irányból kell néznünk a tárgyat, hogy az új képet (vetületet) megszerkesztjük. Pl.: valódi nagyság meghatározása, szemléletesebb kép. Ilyen, új kép meghatározásához olyan új képsíkot veszünk fel, mely merőleges arra az irányra, amelyből a tárgyat szemlélni kívánjuk, de egyben merőlegesen kell állnia vagy az első, vagy a második képsíkra is. Fontos, hogy a K_1 , K_2 -n megállapított információkat értelemszerűen átvihessük az új képsík rendszerre (6.1.ábra). Új képsíkok K_4 , K_5 , K_6 , stb. Új képtengelyek: $x_{1,4}$; $x_{4,5}$; $x_{5,6}$, stb. $x_{2,4}$; $x_{4,5}$, stb. Ezek mindegyike vagy az egyik, vagy a másik képsíkra merőleges. Az új kép információit az elmaradó képről vesszük át.

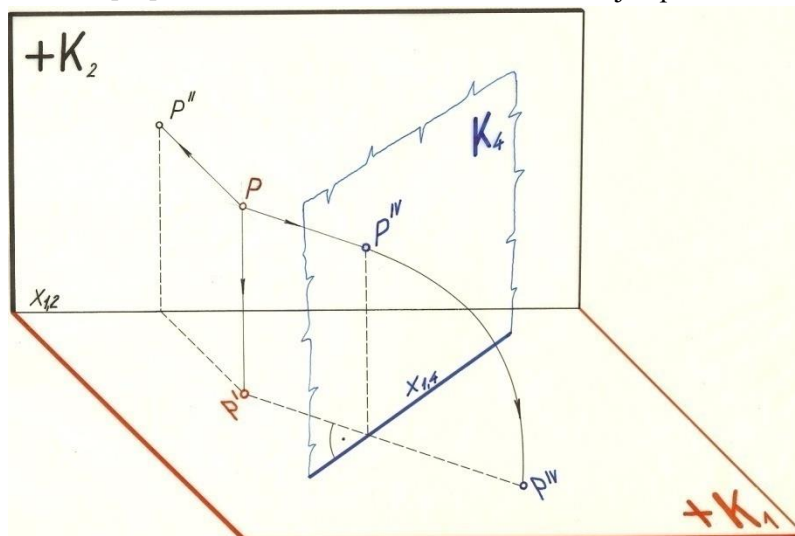
Az alakzatnak a képsíkokon lévő képeit elmaradó, megmaradó és új. képnek nevezzük (6.1.ábra). Hasonlóan nevezzük el a képekhez tartozó rendezőket is a félképsíkoknak megfelelő előjellel. Az új képsík helyzetét elég csak az új tengelyvonal felvételével megadni, mert az elmaradó képsíkkal alkotott tengelyvonalra (mely a régi tengelyvonalra mindig merőleges), a szerkesztésnél nincs szükség. Az új tengely számmutatói mindig arra figyelmeztetnek, hogy az új képsíkot melyik régi képsíkra vettük fel merőlegesen. Az új kép szerkesztését transzformációnak nevezzük.



6.1.ábra Új képsík felvétele [12]



6.2.ábra Pont új képeinek szerkesztése [12]

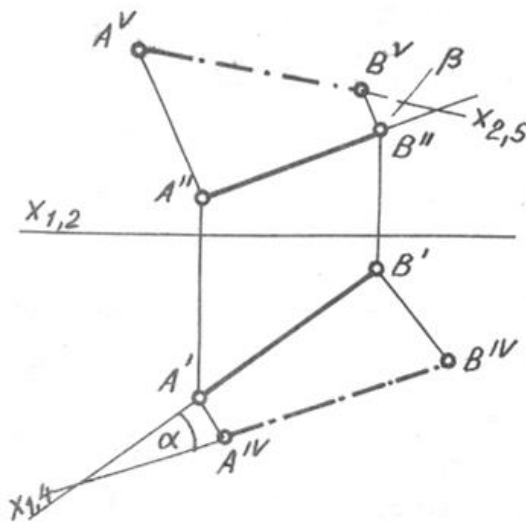


6.3.ábra Pont transzformációja

6.1. Pont transzformációja

- Első lépés az új képsík felvétele nyomvonalával és/vagy tengelyével (6.2.ábra).
- Második lépés: az új tengely által jelképezett képsíkrendszerben a rendezők új irányának megrajzolása.
A megmaradó kép pontjaiból merőlegeseket húzunk az új tengelyen keresztül (P' , majd P^{IV}),
- befejező lépésként az elmaradó rendezőket (a majd b) az új tengelytől felmérjük. Ezzel a pontok átvetítése befejeződött. (X^{IV} és Y^{IV}).

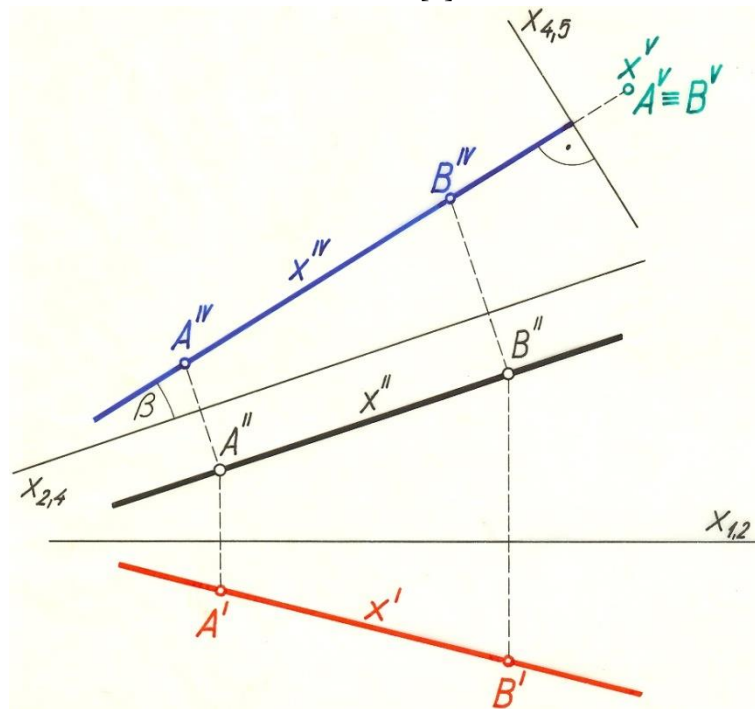
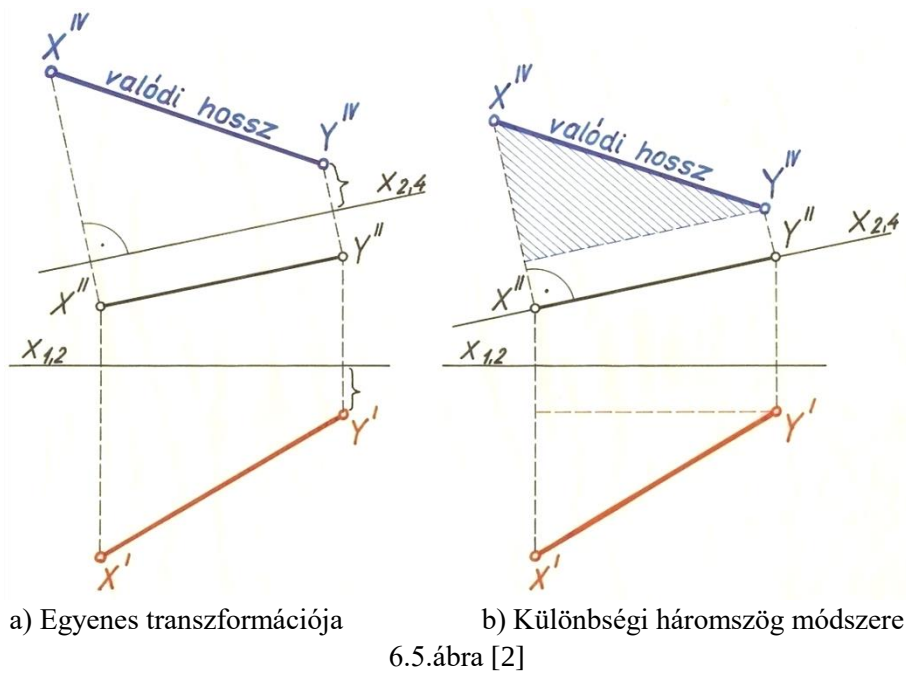
Szakasz, vagy bármilyen összetett test ábrázolásánál is pontokat transzformálunk, s végül a transzformált pontokat összekötjük a láthatóság figyelmes érzékelésével. Az új kép szerkesztéséről még annyit, hogy az új képsíkrendszer egyesítésének módjára nincs határozott szabály. Általában "kifelé" fordítjuk az együttműködő képsíkba, mert rendszerint ott van hely az új ábra számára. Kivételesen, indokolt esetben, azonban nincs tiltva az ellenkező irányba való forgatás sem. Egyenes transzformálása két pontja új képének megszerkesztésével történik. (Két pont meghatározza az egyenest!) E módszer alkalmazásakor az egyenes képsíkokkal bezárt szögei, α és β az új képeken mérhetők (6.4.ábra).



6.4.ábra síkok által bezárt szög meghatározása [2]

Kevesebb számú lépésben, szerkesztést végezhetünk a következő különbségi háromszög módszerével (6.5.b ábra, 6.6.ábra).

Csúszassuk el a szakasz negyedik képét úgy, hogy Y^{IV} ráessék Y'' -re. Így a vonalkázott derékszögű háromszög jön létre, melyet a szakasz különbség háromszögének nevezünk. Ugyanezt a szerkesztést az első kép segítségével is elvégezhetjük. Tehát az egyenes valódi hosszának meghatározása történhet transzformációval és különbségi háromszöggel. Ebben az esetben az új képtengelynek párhuzamosan kell elhelyezkednie az egyenes valamely képével.



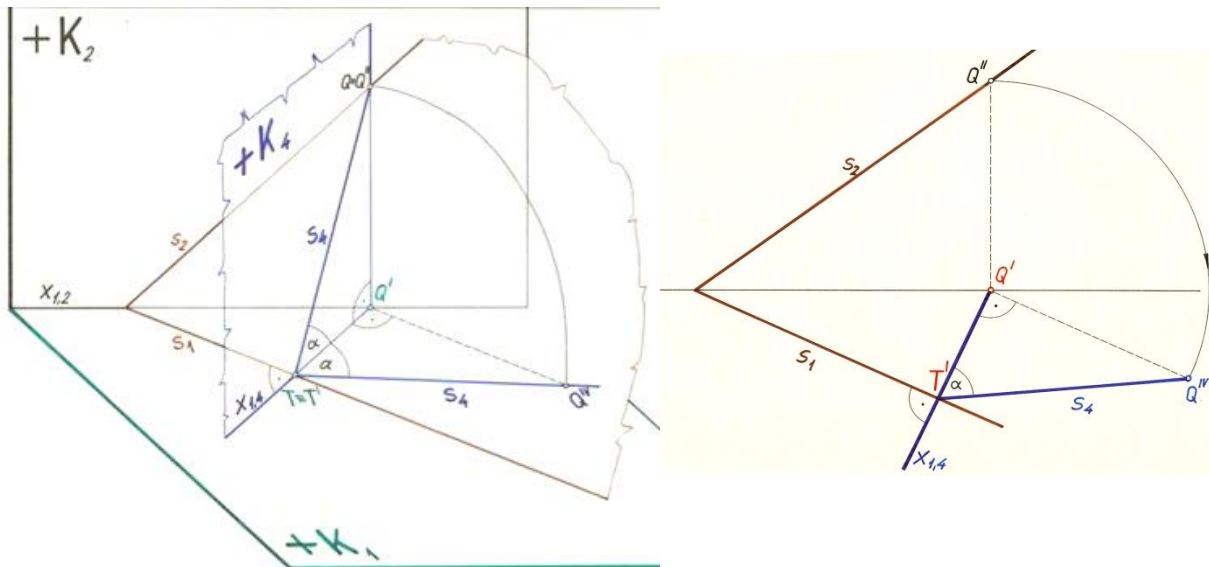
6.2.Sík transzformációja

6.2.1. Sík nyomvonalának transzformációja

Sík nyomvonalának transzformációjánál, az új képtengely merőleges kell legyen valamely nyomvonalra. Sík esetében a transzformáció az adott sík és az új képsík metszésvonalának megszerkesztése. Az új képsík a meglévő képsíkok egyikére merőleges, tehát vetítősík. A feladat, tehát lényegében vetítő és egy másik sík metszésvonalának szerkesztése, ami ismert.

A 6.7.ábrán dőlt síkot transzformáltunk tetszőlegesen választott $x_{1,4}$ tengely körül. Az $x_{1,4}$ tengelyvonalat felfoghatjuk, mint az adott síkot, metsző első vetítősík. Az első nyomvonalát, amely egyben a két egymást metsző sík metszésvonalának első képe is, ugyanakkor a régi sík és a K_4 képsík negyedik nyomvonalának első képe, S_4 is.

A nyompontok segítségével megszerkesztett metszésvonal második képe pedig a negyedik nyomvonal második képével, S_4'' -vel esik egybe. Mivel a sík nyomvonalait képeivel nem ábrázolhatjuk, ezért az új nyomvonalat képeiből még transzformálni kell. Az új $x_{1,4}$ tengely a dőlt sík S_1 nyomvonalát S_1' nyompontban metszi, mely pont transzformálás után is helyben marad, mivel K_1 -ben fekvő pont. Az Q nyompont már transzformálható, így kapjuk Q^{IV} -et, melyet S_1' -vel összekötve adja a sík negyedik nyomvonalát, S_4 -et. Ha a K_1 , K_4 képsíkrendszerben az új $x_{1,4}$ tengelyvonalat S_1 -re e merőlegesen vesszük fel, akkor a síkot vetítő síkká transzformálhatjuk. Ennek az eljárásnak nagy gyakorlati jelentősége lesz a további szerkesztéseinkben.



6.7.ábra Sík nyomvonalának transzformációja [2]

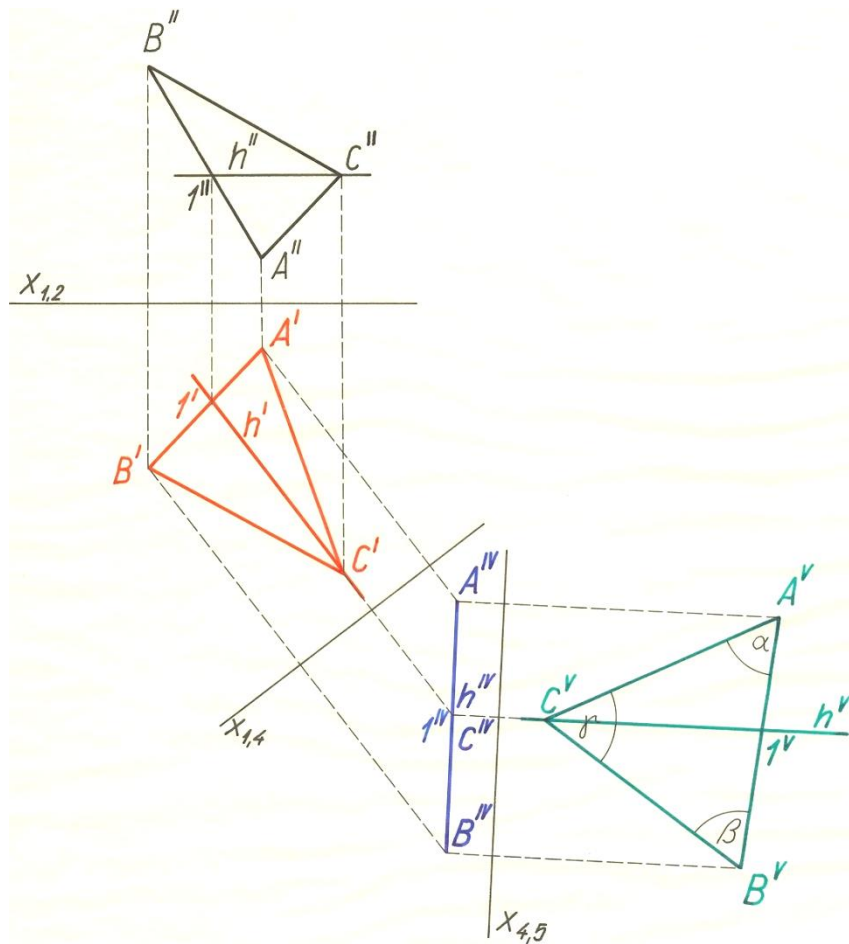
6.2.2. Poligon transzformációja

Ha egy síkot vetítő síkká akarunk transzformálni, akkor az új képsíkot úgy kell megválasztanunk, hogy egyszerre legyen merőleges az adott képsíkra és az új képsíkra is. Ezt akkor érjük el, ha az új képsíkot az adott sík képsíkkal alkotott metszésvonalára (nyomvonalára), vagy az azzal párhuzamos fővonalára merőlegesen vesszük fel.

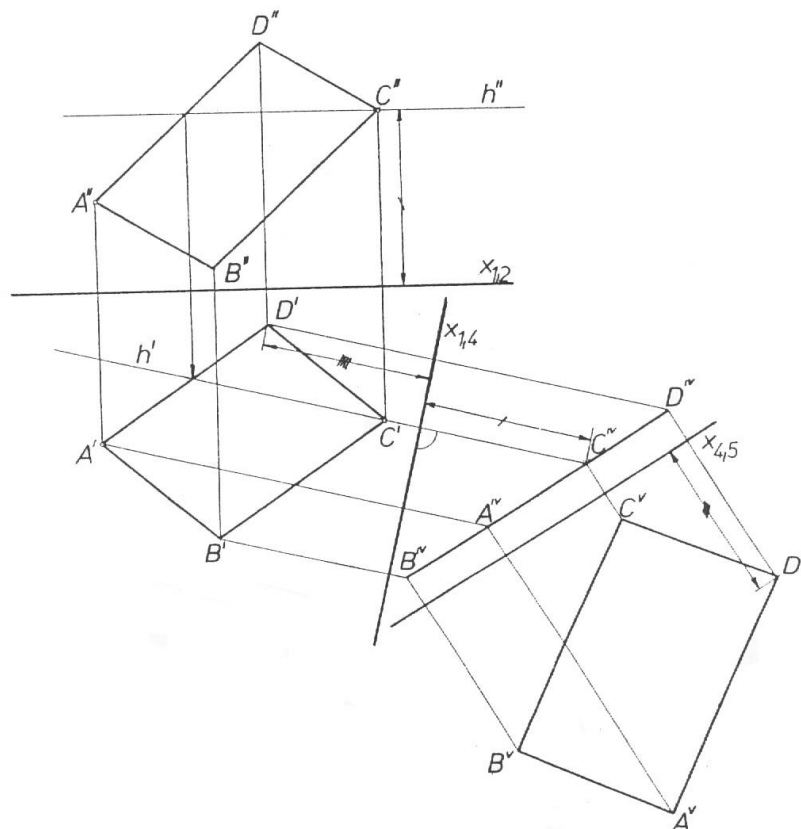
Adott a 6.8.ábrán egy háromszög első és második képével amely egy feszített síkot határoz meg. A sík valódi nagyságát akarjuk meghatározni. A feladat megoldásához felhasználunk egy fővonalat. Mindig az fogja meghatározni mely fővonal lesz az, hogy mely képsíkra kell transzformálnunk. Jelen esetben az első képsíkra történik a transzformáció. Az első vagy horizontális fővonalat használjuk fel, mert az első képsíkon szerkesztünk. A fővonal második képét (h'') ráillesztjük a poligon második képére úgy, hogy az a poligon C'' pontján keresztül menjen és a sík oldalán metszéspontot hozzon létre egy I'' pontot. Elvégre az egyenest két pontjával határozzuk meg. Következő lépésként a fővonal első képét (h') vetítéssel meghatározhatjuk. Az horizontális fővonal első képére (h') felvesszük merőlegesen az új képtengelyt $x_{1,4}$ -et. Így definiálásra került a K_4 -es új képsík. Az új képtengelyre a megmaradó első kép pontjaiból merőleges vetítőket szerkesztünk a K_4 -es képsíkra, azaz az $x_{1,4}$ -re. Ezután az elmaradó második képről felmérjük az elmaradó képek és az elmaradó képtengely közötti távolságokat és ezeket az új képtengely és a merőleges vetítők metszéspontjába felmérve a megfelelő vetítőre megkapjuk a pontok negyedik képeit. Azokat összekötve létrejön a poligon negyedik képe. Az új képsíkon megjelenő poligon képe már egy egyenesként jelentkezik, rajta a poligon három pontjával, ami vetítő sík. Nem szükséges a síkot három pontjával transzformálni, mert a két szélső pont transzformálásával a harmadik pont meghatározható illetve adódik.

A valódi nagyság meghatározásához még egy transzformációra szükségünk van. Az új képsíkot és annak új képtengelyét úgy kell felvenni, hogy a negyedik képpel párhuzamos legyen. Így az ötödik képen a poligon valódi nagysága fog megjelenni. Mivel az új képsík párhuzamos a megmaradó képpel, így ötödik képsíkként is definiálható. Az elmaradó kép az első kép, a megmaradó a negyedik, az új kép az ötödik (K_5). A végeredményhez az előzőekben leírt szerkesztési eljárást kell megismételni.

A 6.9.ábrán látható poligon is ugyanígy szerkeszthető.



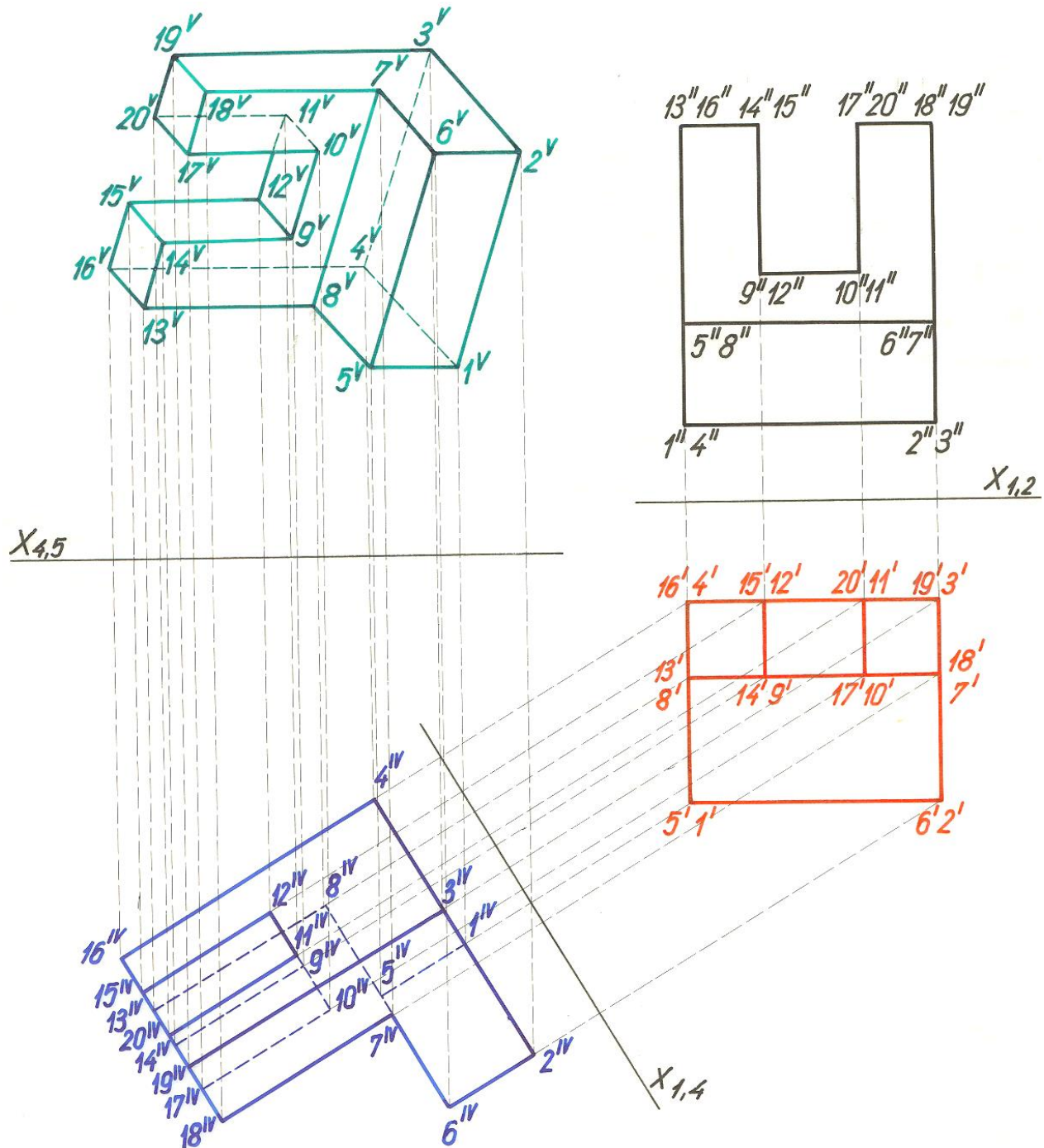
6.8.ábra Háromszög transzformációja [12]



6.9.ábra Poligon transzformációja [12]

6.3. Test transzformációja

Adott a test első és második képe (6.10.ábra). Az új képtengely felvétele tetszőleges. Az adja meg, hogy mely információkat, alaksajátosságokat akarjuk megmutatni az adott munkadarabon. A transzformálás során létrehozott új negyedik kép megint vetítés lesz. A lényege, hogy a képtengelyre merőleges vetítőkön lévő pontokat úgy tudjuk ábrázolni, hogy minél kevesebb olyan vetítő legyen, amihez több pont tartozik. Ezután az újbóli transzformálás után érjük el a végleges helyzetet, ami a test ötödik képe lesz. Itt már minden ponthoz egyedi merőleges vetítő tartozik. A képtengelyek távolsága a testtől szabadon választott.



6.10.ábra Test transzformációja

7. ROTÁCIÓ [1]

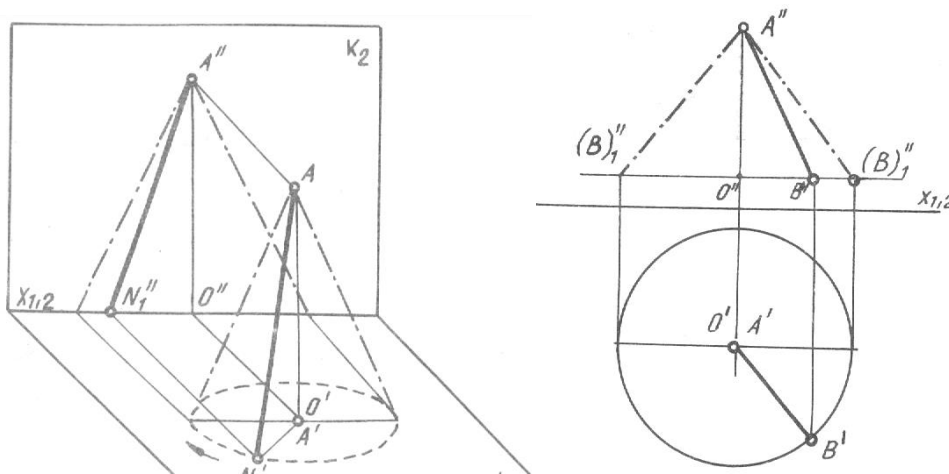
Ennél a valódi nagyság-meghatározási módnál az egyenest hozzuk valamelyik képsíkkal párhuzamos helyzetbe. Ez legegyszerűbben úgy történik, hogy az alakzatot egy egyenes, mint tengely körül addig forgatjuk, amíg a kívárat helyzet elő nem áll.

Ha a tengelyt:

1. valamelyik képsíkra merőlegesen választjuk, akkor a forgatási műveletet elforgatásnak /rotáció/ nevezzük,
2. valamelyik képsíkban, vagy azzal párhuzamosan vesszük fel, akkor a szerkesztési eljárást leforgatásnak nevezzük.

Ez utóbbi eljárást főként akkor alkalmazzuk, ha egyetlen síkban fekvő alakzat valódi nagyságát akarjuk megszerkeszteni.

Szemléltetve mutatjuk meg az A, N_1 egyenes szakasz valódi nagyságának rotációval való meghatározását (7.1.ábra).



7.1.ábra Egyenes valódi hosszának meghatározása [2]

Vegyünk fel a szakasz A végpontján át a K_1 -re merőleges t -tengelyt és forgassuk meg a távolságot a tengely körül. Egyenes körkúp keletkezik, amelynek kontúralkotói a második képen valódi nagyságban látszanak és egyenlők a felvett AN_1 távolsággal.

Vegyünk fel az AB távolság $A'B'$, $A''B''$ képeit és rotációval szerkesszük meg a szakasz valódi hosszát. A forgástengelyt a távolság A végpontján K_1 -re merőlegesen vettük fel, s e tengely körül K_2 -vel párhuzamos helyzetbe forgattuk. A forgatásnál a távolság minden pontja kört ír le, a körök síkja (most) K_1 -el párhuzamos, a körök középpontja a forgatás tengelyén van, azaz O' egybeesik A' -vel. Elegendő a távolság B végpontját forgatni, mert a forgástengelyen lévő A pont helyben marad. A távolság elforgatott B pontját zárójelbe tesszük. Távolság valódi nagyságát abban az esetben érdemes rotációval szerkeszteni, ha több olyan távolságról van szó, amelynek a végpontja közös, pl, ferde gúla, kúp lemeztervénél, stb.

Végezhetünk rotációt K_2 -re merőleges tengely körül is. Ebben az esetben a távolságot K_1 -gyel párhuzamos helyzetbe forgatjuk.

8.SÍK LEFORGATÁSA ÉS VISSZAÁLLÍTÁSA (AFFINITÁS) [1][9]

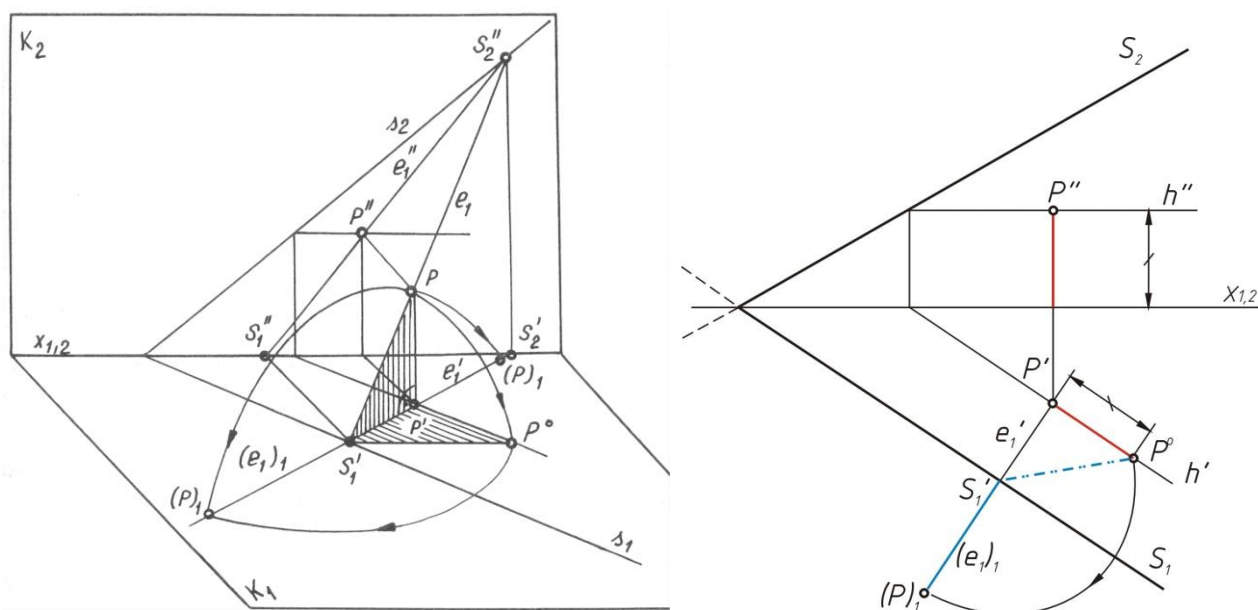
Ha valamely általános helyzetű síkban adott egy olyan idom, amelynek valódi nagyságát kell meghatároznunk, vagy ha a síkban fekvő adatoknak, térelemeknek, vagy idomoknak egymáshoz való igazi helyzetét kell felkeresnünk, vagy pedig velük a síkban planimetriai szerkesztéseket kell végeznünk, akkor ezt a síkot a benne fekvő térelemekkel, idomokkal együtt az első nyomvonal körül K_1 -be, vagy a második nyomvonal körül K_2 -be forgatjuk. Ezáltal, ha adott volt egy síkidom, ez valódi nagyságban fog feltűnni, ha pedig térelemekkel, vagy általános adatokkal van dolgunk, ezeket a forgatás után egymáshoz való igazi helyzetükben látjuk. Ebben a helyzetben a térben végzendő planimetriai szerkesztéseket is elvégezhetjük, melynek eredményét aztán az eredeti síkba kell visszaállítani.

A sík forgatását a síkot meghatározó térelemek forgatására vezetjük vissza. A téralakzatok forgatása minden esetben egy egyenes, ún. forgástengely, körül történik. Forgatás közben a téralakzat minden pontja egy, a forgástengelyre merőleges síkban mozog és olyan körívet ír le, amelynek középpontja a forgástengelyen van. A kör sugarát a forgó pontnak a forgástengelytől mért távolsága adja. A sík képsíkba forgatásánál forgástengelynek a sík valamelyik nyomvonalát használjuk.

8.1. Pont leforgatása

Ez a művelet minden olyan feladat megoldására alkalmas, amely a síkban fekvő távolság, idom, szög és terület viszonyaira vonatkozik, következőkben nyomvonalával (s_1 és s_2) adott síkban fekvő pont leforgatását fogjuk megismerni.

Ha a síkot a benne fekvő P pontjával az s_1 első nyomvonal körül forgatjuk, akkor a P pont forgási körének síkja első vetítősík, mely az adott síkot P -re illeszkedő első esésvonalban, e_1 -ben metszi. Ennek $S_1 = S_1'$ első nyompontja a forgási kör középpontja, forgási sugara pedig a $P S_1'$ távolság. Ezt szemléletesen mutatja be az 8.1. ábra térbeli és síkbeli szerkesztéssel.



8.1. ábra Pont leforgatása K_1 -re [2]

A forgási kör első képe egybeesik az esésvonal első képével, e_1' -vel, mely egyben az esésvonal első képsíkba forgatottja is, $(e_1)_1$. A P pont leforgatottja pedig az esésvonal leforgatottjára esik, és s_1 -től PS_1 távolságra van. Ezt a távolságot szerkesztéssel kell meghatározni.

Az ábrából leolvashatjuk, hogy a $P S_1'$ távolság a $P P' S_1'$ derékszögű háromszög átfogója, melynek egyik befogója $P_1 S_1'$ távolság P' -nek s_1 első nyomvonalától, $P P'$ - távolság pedig P'' -nek az $x_{1,2}$ tengelytől mért távolságával egyenlő. Ha most a P pont forgatási derékszögű háromszögét a K_1 -ben lévő $P' S_1'$ befogója körül K_1 -be oldalt döntjük, /fektetjük/, nyerjük a P pont oldaltfektetettjét, P^o -t. Az így kapott $P' S_1' P^o$ háromszög a forgási derékszögű háromszög valódi nagysága, melynél $P^o S_1'$ távolság a P pont forgási sugara. Ha ezt a távolságot felmérjük az esésvonal leforgatottjára, megkapjuk a P pont K_1 -be forgatottját, $(P)_1$ -et.

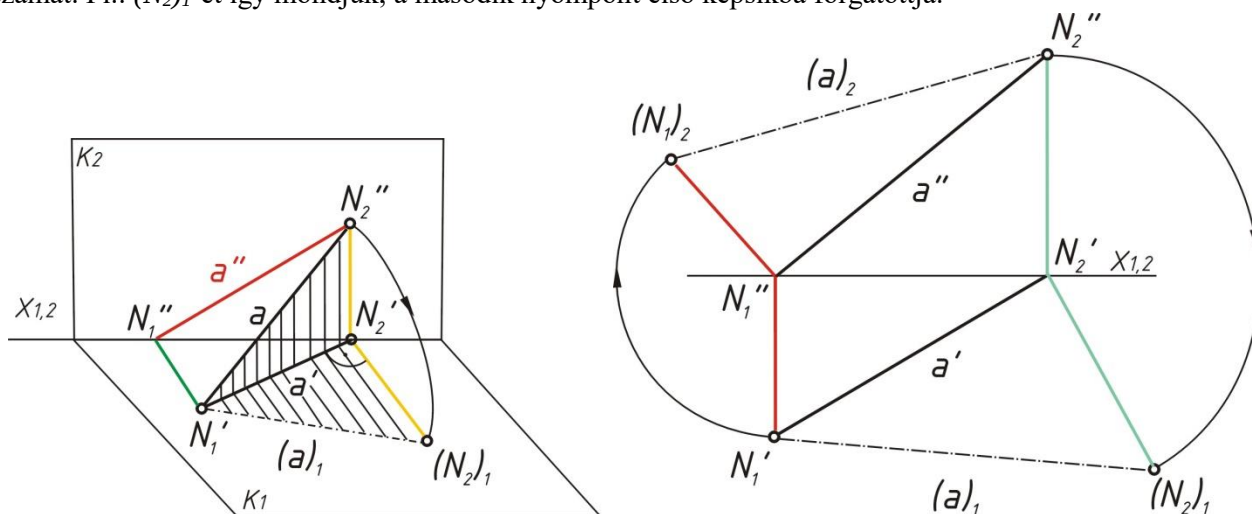
A leforgatást a képsíknak abban a felében végezzük el, ahol a sík a képsíkkal tompaszöget zár be, mert csak így érjük el, hogy a képeket és a leforgatottakat a nyomvonal elválasztja. A 8.1.ábrán nyomvonalaival adott dőlt síkot, (s_1, s_2) a benne fekvő P ponttal (P', P'') az első nyomvonala körül leforgattuk K_1 -be. A forgatáshoz szükséges derékszögű háromszög befogóját a fent ismertetett módon szerkesztettük meg. Amit a K_1 -be forgatásról megállapítottunk, az értelemszerűen K_2 -be forgatásra is érvényes.

8.2. Egyenes leforgatása

Egyenes valódi nagyságának képsíkba forgatással való meghatározása akkor előnyös, amikor az egyenes N_1 -től N_2 nyompontig terjedő távolságára, valamint képsíkszögére vagyunk kíváncsiak.

A térbeli a egyenes (8.2.ábra), az N_2 nyompont rendezője, valamint az a' a térben egy derékszögű háromszöget alkot (sraffozott terület), melynek csúcspontjai: N_1' , N_2'' , N_2' . A háromszög síkja merőleges K_1 -re, tehát első vetítősík, melynek n_1 nyomvonala egybeesik, a' -vel. Ha az a' - körül, mint tengely körül, a háromszög síkját 90° -kal beforgatjuk K_1 -be, akkor az N_2 nyompont is forgást végez. A forgás a forgástengelyre minden esetben merőleges irányú, jelen esetben a forgástengely a' , a forgási rádiusz pedig a forgatott ponthoz tartozó rendező. A kapott $N_1'/N_{2,1}$ távolság mutatja az a egyenes első térnegyedben lévő részének valódi nagyságát. A 8.2.ábrán bemutatásra került az a egyenes mindkét képsíkba való forgatása.

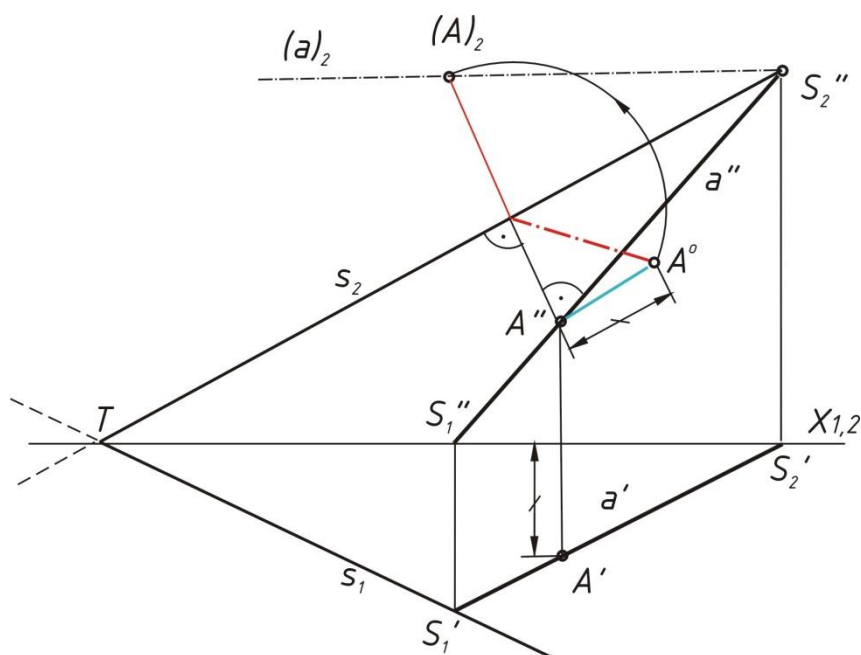
A forgatott elem betűjelzését $'()$ közé írjuk és a jobboldali külső alsó felénél tüntetjük fel a képsík indexszámát. Pl.: $(N_2)_1$ -et így mondjuk; a második nyompont első képsíkba forgatottja.



8.2.ábra Egyenes és pontjainak leforgatása K_1 -re [4]

Forgassuk le nyomvonalaival adott dőltsíkban fekvő „ a ” egyenest s_2 körül K_2 -be a 8.3.ábrán.

Az egyenest általában két pontjával forgatjuk le, melyek összekötése adja az egyenes leforgatottját, s egyben valódi nagyságát. A feladat gyorsabb megoldása érdekében célszerű, ha egyik pontnak a forgatás tengelyére illeszkedő, ún. helyben maradó pontját, (nyompont, most S_2) választjuk, így csak az egyenes az (A', A'') pontját kell forgatni.

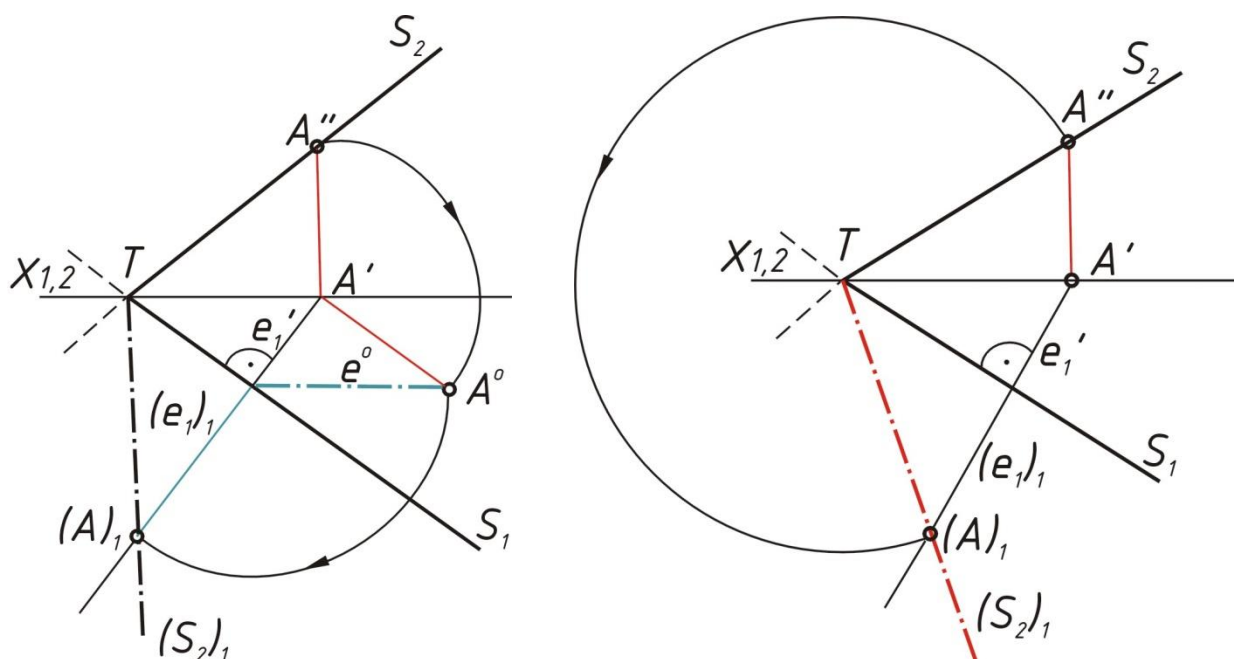


8.3.ábra Egyenes leforgatása K_2 -be (tengelyes affinitás) [2]

8.4. Nyomvonal forgatása

Forgassuk le az adott dőlt sík (s_1 és s_2) második nyomvonalát s_1 körül K_1 -be a 8.4.ábrán. A feladat a nyomvonal két tetszőleges pontjának leforgatására vezethető vissza. Egyik pontnak vegyük az s_2 -nek $x_{1,2}$ tengelybeli T pontját, mert ez a pont helyben maradó pontja s_2 -nek, másik pontjának az A pontot választottuk. A továbbiakban a már ismert módon megszerkesztjük $(A)_1$ -et, melyet T -vel összekötve kapjuk $(s_2)_1$ -et. A jobboldali ábrán egyszerűbben végeztük el ugyanezt a szerkesztést.

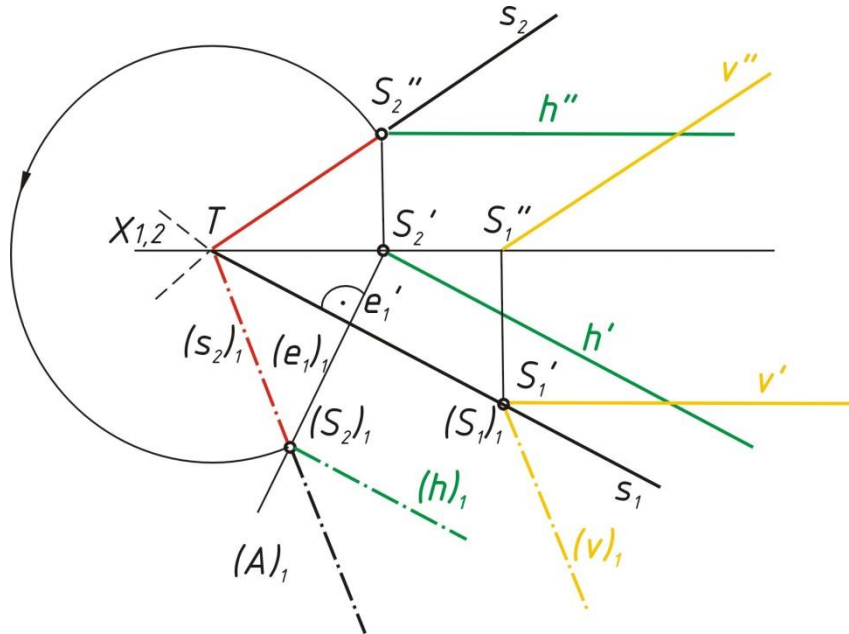
Az A pontnak a leforgatás után e_1 esésvonalnak az első képsíkba forgatottján kell feküdnie. Ugyanakkor A pontnak T -től leforgatás előtt és után ugyanolyan távol kell lenni. E szerint, ha A' -n átmenő és s_1 -re merőleges egyenest T -ből, mint középpontból TA'' sugárral rajzolt körívvel bemetszünk, megkapjuk az A pont első képsíkba forgatottját, $(A)_1$ -et, melyet T -vel összekötve nyerjük $(s_2)_1$ -et.



8.4.ábra Nyomvonal leforgatása [4]

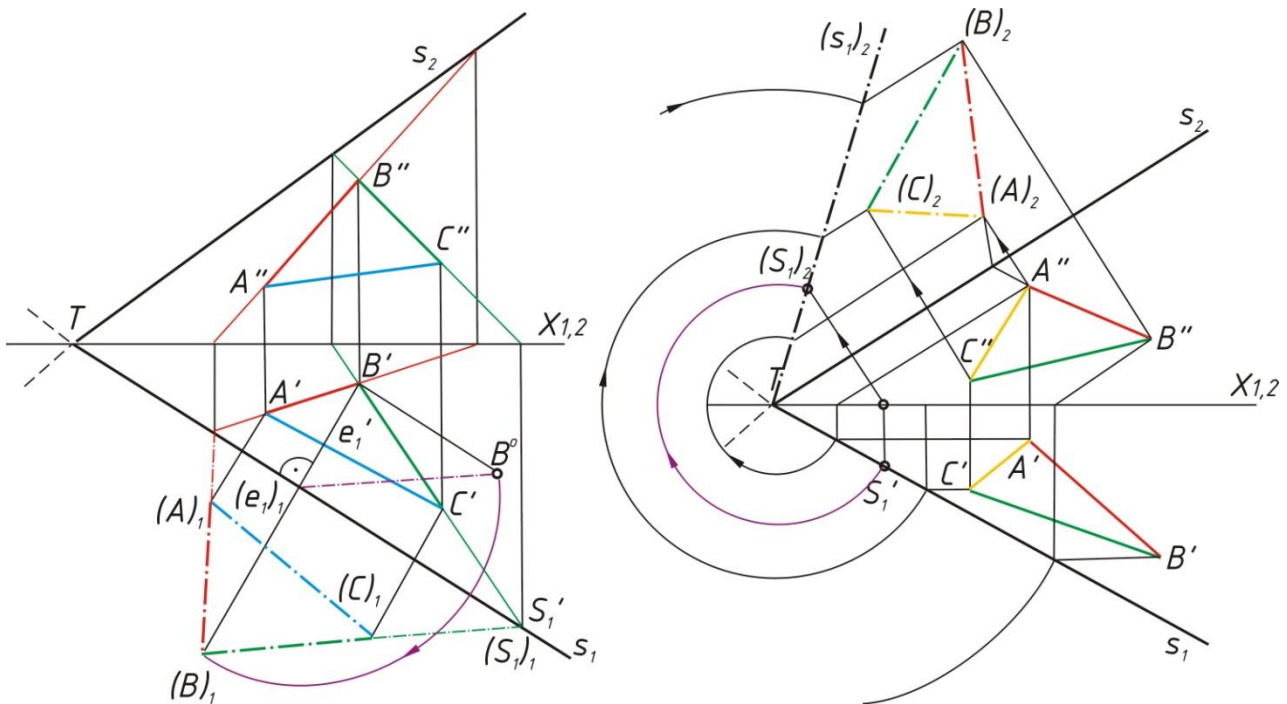
8.5. Fővonal leforgatása

Szerkesszük meg nyomvonalalaival adott dőlt síkban fekvő első és második fővonalnak az s_1 körül az első képsíkba leforgatottját az 8.5.ábrán. Elegendő a fővonal egyetlen pontjának leforgatottját ismerni. Tetszőleges pont helyett célszerűbb a fővonal nyompontját választani. Az első fővonal második nyompontjának leforgatottja $(s_2)_1$, amelyen átmenő és s_1 -el párhuzamos egyenes az első fővonal leforgatottja, $(h)_1$. Ha $(s_2)_1$ -et T -vel összekötjük, a második nyomvonal K_1 -be forgatottját, $(s_2)_1$ -et kapjuk. A második fővonal első nyompontjának leforgatottja egybeesik s_1' -vel, ebből a pontból $(s_2)_1$ -el húzott párhuzamos a második fővonal leforgatottja, $(v)_1$.



8.5.ábra Fővonalak leforgatása [4]

8.6. Síkidomok leforgatása



8.6.ábra Poligon leforgatása adott síkról K1-be és K2-be. [2]

Forgassuk le s_1 és s_2 nyomvonalával adott síkban fekvő ABC háromszöget s_1 körül K_1 -be. (A feladat pont leforgatására vezethető vissza.)

I. megoldás: Mindhárom pontot külön-külön leforgatjuk.

II. megoldás: Az első nyomvonaltól legtávolabbi B pontot általános eljárással leforgatjuk és nyerjük $(B)_1$ -et. A háromszög BC oldalát meghosszabbítva metszésbe hozzuk s_1 -gyel, ahol a BC egyenes s_1 első nyompontját megkapjuk, amely forgatás közben helyben marad. BS_1 leforgatottja $(S_1)(B)_1$, melyből C' -n átmenő és s_1 -re merőleges egyenes kimetszi C -pont leforgatottját, $(C)_1$ -et. Hasonló módon nyerjük $(A)_1$ -et, majd ezeket összekötve ABC háromszög leforgatottját, mely egyben a háromszög valódi nagysága.

III. megoldás: Fővonalak leforgatásával. A 8.6. ábra jobb oldalán dőlt, síkban fekvő háromszöget forgattunk le s_2 körül a K_2 -be. A forgatáshoz második fővonalakat alkalmaztunk.

Ellenőrzés: Bármely oldal első, ill. második képe és leforgatottja az s_1 - ill. az s_2 -ben metszi egymást.

8.7. Affinitás

Olyan két egyesített síkrendszerbeli rokonság, amelyben pontoknak pontok, egyeneseknek egyenes felel meg. A megfelelő pontokat összekötő egyenesek egymással párhuzamosak, a megfelelő egyenesek metszéspontjai egy fix egyenesen az affinitás tengelyében fekszenek.

A K_1 és K_2 között ferde affinitásról beszélünk.

Az affinitás meghatározott ha adva van: - tengelye és egy megfelelő pontpárja,

- tengelye és egy megfelelő egyenespárja,

- 3 megfelelő pontja.

Planimetrális szerkesztésnek is nevezzük, tulajdonsága, hogy a síkot és a benne lévő térmértani eleme(ke)t az s_1 vagy az s_2 nyomvonal körül a K_1 vagy K_2 -be forgatjuk. Ez visszafelé is elvégezhető.

A leforgatott pont, egyenes, síkidom, stb. és vetületei között geometriai rokonság van. Mivel a kép és annak leforgatottja ugyanabban a képsíkban kerül ábrázolásra, egyik a képrendszer a másik a síkrendszer. Az egyik rendszer valamely pontjának, egyenesének van a másik rendszerben megfelelő pontja, egyenese. A megfelelő pontokat összekötő egyenesek párhuzamosak. A megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesen, a sík nyomvonalán vannak. Illeszkedő elemek pl.: háromszögnek háromszög, körnek ellipszis. Ezeket párhuzamos affinitásnak nevezzük. A megfelelő pontokat összekötő egyeneseket affín sugaraknak nevezzük.

Ha az affinitás iránya merőleges, akkor merőleges affinitásról beszélünk. Ha az affín sugarak nem merőlegesek az affín tengelyre, akkor ferde affinitásról beszélünk. Ez a ferde affinitás érvényes az első és a második kép között (8.3.ábra - 8.6.ábrák).

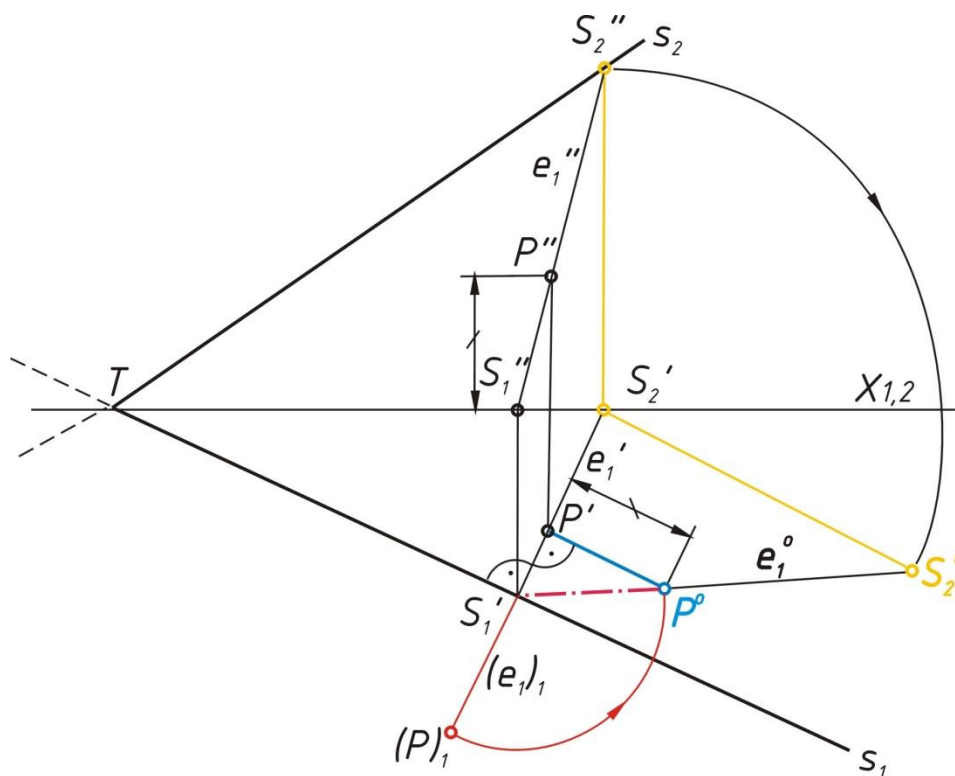
8.8. Sík és benne fekvő alakzatok visszaállítása

A visszaállítás a leforgatás megfordítottja, amikor a síkbeli alakzat leforgatottjából kell annak képeit megszerkeszteni. A visszaállítás szerkesztési módszerének ismerete nélkül nem tudnánk kör, négyzet, egyenlő oldalú idomok, stb. képeit ábrázolni. Bármely síkbeli alakzat visszaállítása a pont visszaállítására vezethető vissza.

8.8.1. Pont visszaállítása

Adott s_1 és s_2 nyomvonalával meghatározott síkban fekvő P -pont K_1 -be forgatottja, $(P)_1$ a 8.7.ábrán. Szerkesszük meg a P pont képeit.

A $(P)_1$ -ből s_1 -re merőlegesen húzott egyenesbe esik a P pont első esésvonalának leforgatottja, $(e_1)_1$, valamint annak első képe, e. Következésképpen P' -nek el-n kell feküdnie. Szerkesszük meg az esésvonal második képét nyompontjai segítségével, majd az s_2 nyompont forgási derékszögű háromszögét, melynek átfogója $S_1'S_2^o$, az esésvonal oldalfektetettje. Ebbe az egyenesbe esik a P ponthoz tartozó forgási derékszögű háromszög átfogója is, amelynek valódi hossza a $(P)_1S_1'$ -távolság. Mérjük rá a távolságot s_1 -től e_1^o -ra, P^o -t, melyből e_1' -re állított merőleges egyenes e_1' -n kimetszi a P pont első képét, P' -t. A P'' -t vetítéssel nyerjük e_1' -n.

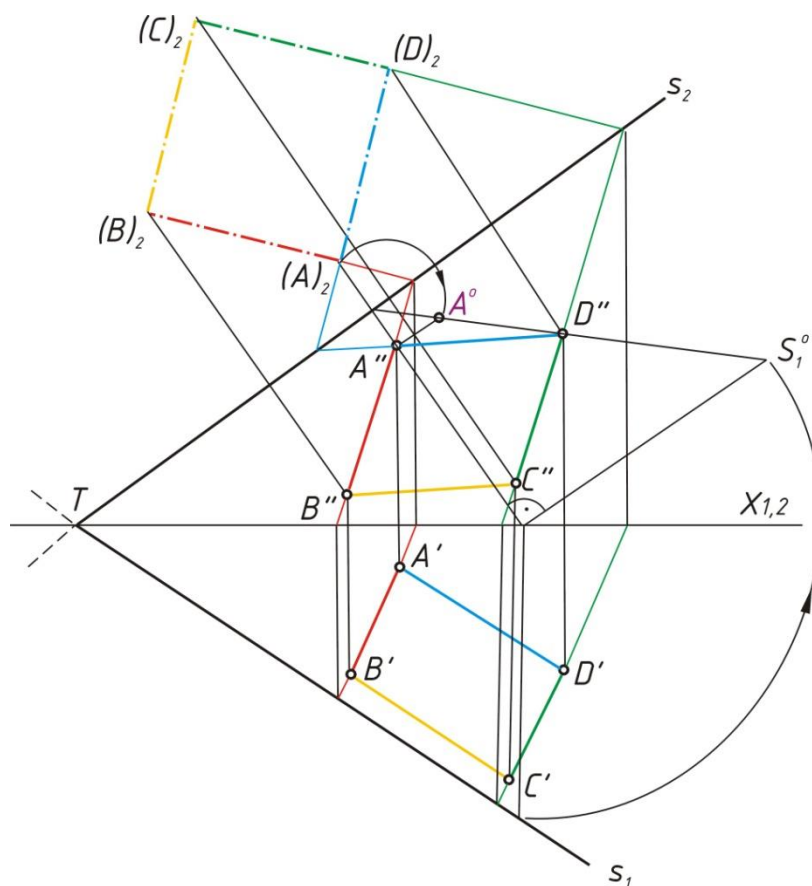


8.7.ábra Pont visszaállítása K1-ről adott sík első és második képére [2]

8.8.2. Síkidomok visszaállítása

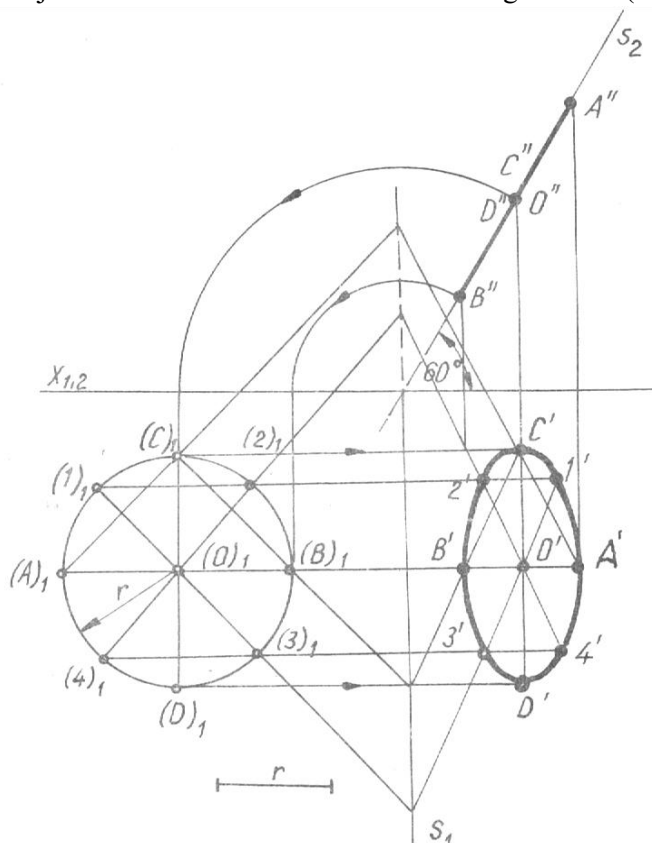
Adva $ABCD$ négyzet K_2 -ben fekvő leforgatottja, valamint síkjának s_1 és s_2 nyomvonala. Szerkesszük még a négyzet első és második képét a 8.8.ábrán.

A csúcspontok visszaállítását az előző pontban megismert eljárással, valamint az affinitás alkalmazásával szerkesztettük meg.



8.8.ábra Poligon visszaállítása adott síkra [2]

Adott O pont első és második képe, O' és O'' , valamint r -távolság. Szerkesszük meg az O középpontú és r sugarú kör képeit, ha a kör síkja második vetítősík és K_1 -el 60° -os szöget zár be (8.9.ábra).

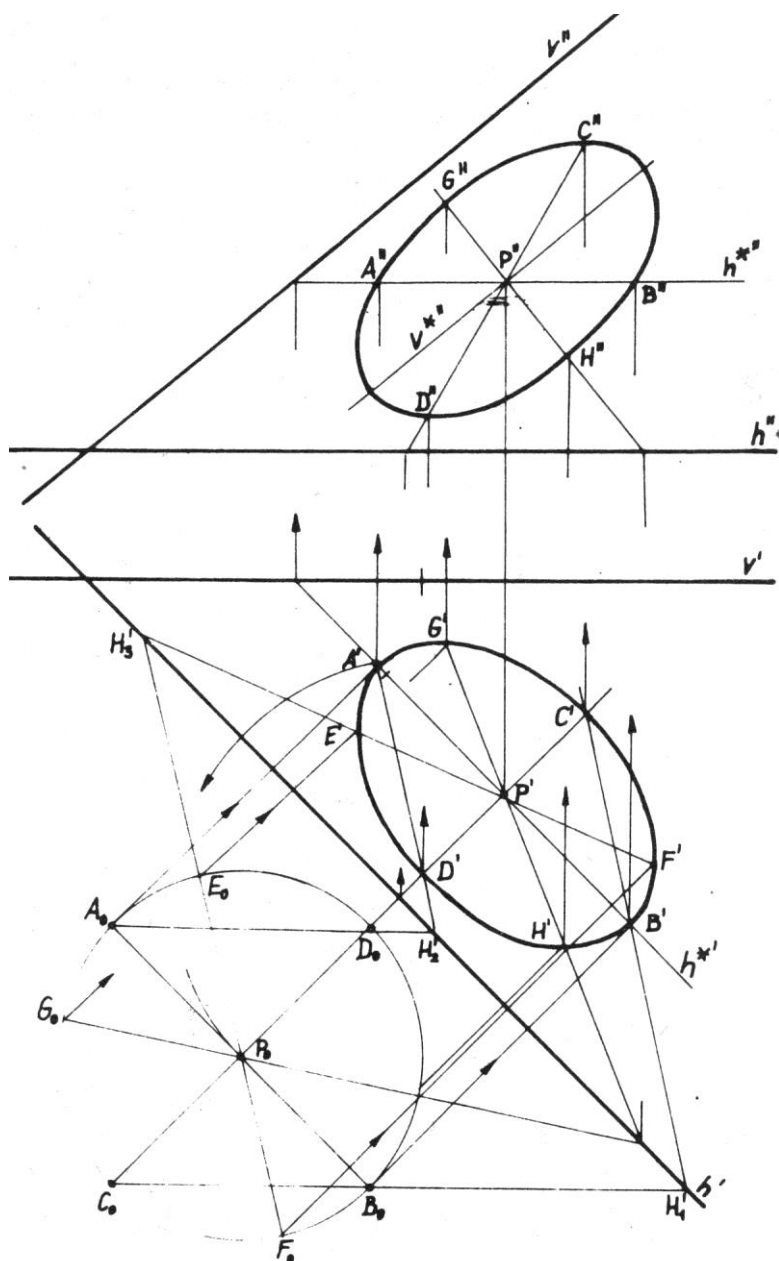


8.9.ábra Kör képeinek visszaállítása második vetítősíkra [2]

Adott a 8.10. ábrán egy sík fővonalaival (dőlt) valamint a síkra illeszkedő P pont első képe mely az adott kör középpontja. Továbbá adott az r sugara. Ábrázoljuk a kört első és második képen.

Mivel adott a P' , merőleges vetítéssel és első fővonal segítségével meghatározható P'' . Ez szükséges a pont oldalfektetett képének (P^o) megszerkesztéséhez, ami a P -hez tartozó forgatókör sugarat biztosítja. Esésvonalat szerkesztünk a P' -n keresztül a leforgatás tengelyére (h'), majd leforgatjuk a pontot. A leforgatott pontból az adott sugárral kört szerkesztünk. A kör középpontján keresztül több egyenest szerkesztünk amelyek metszéspontokat hoznak létre a leforgatott körön (kijelöljük a kör pontjait A, B, C, D, E, F, G, H) és a h' -n. A P' segítségével a segédegyneseket visszafogatjuk az első képre és az adott egyenesekre visszaállítjuk a megfelelő pontokat. Most már a kör első képét megrajzolhatjuk a visszaállított pontok összekötésével.

A második kép szerkesztése már egyszerű vetítés. A segédegynesek első képeinek metszéseit (nyompontjait) megkeressük az $x_{1,2}$ tengelyen. További merőleges vetítéssel a nyompontok ($x_{1,2}$ tengelyen és a fővonalak második képein), majd a fedőegynesek második képei is adódnak. Utolsó lépésként a kör második képét megkapjuk a visszaállított második pontok összekötésével.

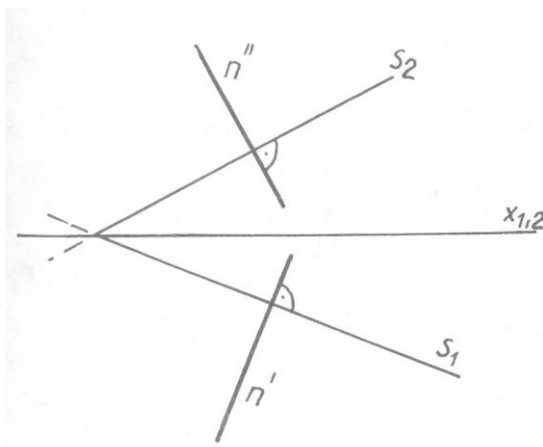


8.10.ábra Kör képeinek visszaállítása dőlt síkra [5]

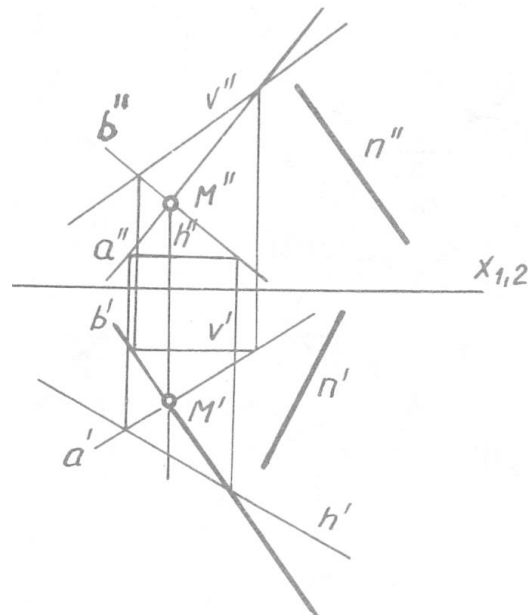
9. TÉRELEMEK MÉRETGEOMETRIÁJA

9.1. Egyenes és sík egymásra merőleges helyzetben

Az egyenes és sík merőlegességének elégséges feltétele, hogy az egyenes a síknak bármely két nem párhuzamos egyenesére, tehát pl. az s_1 és s_2 nyomvonalára merőleges legyen, mert a síkot két egyenese egyértelműen meghatározza. Ha az „ a ” egyenes az S síkra merőleges, akkor a sík minden egyenesére, tehát az s_1 nyomvonalra is merőleges. De ekkor lehet n -en keresztül s_1 -re merőleges síkot illeszteni (9.1. ábra). Azonban s_1 az első képsíkon fekszik, tehát a rá merőleges sík első vetítősík, következésképpen lehet n -en át s_1 -re merőleges vetítősíkot szerkeszteni.



9.1. ábra A sík normálisa [2]



9.2. ábra Fővonalakkal szerkesztett sík normálisa [2]

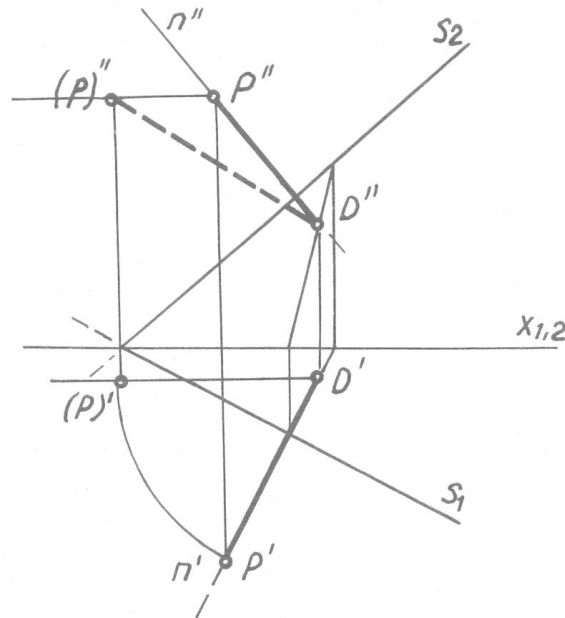
Az n -re illesztett első vetítősíknak n' egyenesese, így ennek s_1 -re merőlegesnek kell lenni. Ha ezt szóról szóra elismételjük a második képre is, akkor bebizonyítottuk, hogy a síkra merőleges egyenesnek első képe a sík első nyomvonalára, második képe a sík második nyomvonalára merőleges. Az ilyen egyenest a sík normálisának is szoktuk mondani. Ha a sík nem nyomvonalakkal, hanem két metsző egyenesével adott, akkor a merőleges egyenes megszerkesztésénél mindig meg kell szerkeszteni a sík nyomvonalait, vagy fő vonalait. A 9.2. ábrán az a és b metsző egyenespárral adott síknak két fővonalát, h -t és v -t szerkesztettük meg és az a merőleges képeit a megfelelő fővonalakra merőlegesen rajzoltuk.

Adott pontból adott síkra merőleges egyenes képeit a fentiek alapján úgy kell felvenni, hogy a szerkesztés utolsó lépéseként az a egyenes első és második képét az adott pont első és második képére kell illeszteni. (Természetesen a megfelelő nyom- vagy fővonalakra merőlegesen.) A feladat fordítva is megoldható. Az adott P ponton át fektessünk az adott e -egyenesre merőleges síkot.

Az adott e egyenes képeiből rögtön ismerjük a rá merőleges sík nyomvonalait, ill. fővonalainak irányát, (itt, az egyenes megfelelő képeire merőlegesen), s így minden nehézség nélkül meghúzzuk az ismeretlen síknak P -n átmenő első (vagy második) fővonalát, h -t, s ezen át a síkot (n_2 átmenő h második nyompontján és n_1 egyik pontja n_2 tengelypontja). A szerkesztés a leírás alapján elkészíthető.

9.2. Pont távolsága síktól és egyenestől

A P pontnak az S síktól való távolságát úgy szerkesztjük meg, hogy P -n át az S -re merőleges a egyenest rajzolunk, n -nek meghatározzuk az S -sel való D dőféspontját, végül p és D távolságot megszerkesztve a keresett távolságot kapjuk 9.3.ábra. A P pont egyenestől való távolságát az egyenes és sík dőféspontjának szerkesztésére vezetjük vissza. Először megszerkesztjük a ponton keresztül az egyenesre merőleges síkot, meghatározzuk az egyenes és sík dőféspontját, majd meghatározzuk a pont és dőféspont távolságát. Ez lesz a pont és egyenes távolsága.



9.3.ábra Pont valódi távolsága adott síktól [2]

9.3. Két párhuzamos egyenes távolsága

A 9.4.ábrán látható feladat megoldása az egyik egyenesnek egy tetszőleges pontját vesszük fel, és annak keressük a másik egyenestől való távolságát.

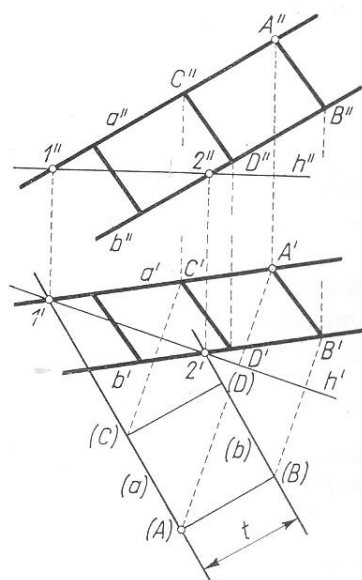
Az a és a vele párhuzamos b egyenes távolságát az összekötő síkjukban szerkesztjük meg. A síkban tetszőlegesen felvesszük a h fővonalat, majd a körül a -t az A pontjával első főállásba forgatjuk. Itt (a) -val párhuzamos (b) , és $(A)(B) = t$ a távolság valódi nagysága. Ha pl. az a és b szárok között négyzetes fokosztással „hágesót” szeretnénk ábrázolni, akkor a leforgatásból kell kiindulni. Az $(A)(B)$ mellé rajzolt $(C)(D)$ „fokot” stb. visszaállítjuk.

- ha mind a két egyenes ugyanarra a képsíkra merőleges, akkor ott a pontként megjelenő képek között a távolságuk valódi nagyságban mérhető le;
- ha az egyenesek képsíkkal párhuzamosak, akkor távolságuk az egyenesekre merőleges új képsíkon valódi nagyságban látszik.

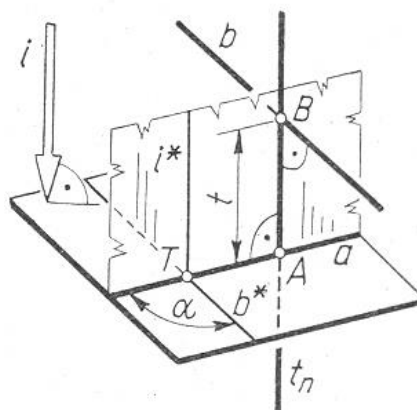
9.4. Két kitérő egyenes távolsága

Két kitérő egyenes távolságát mindkét egyenesre merőleges ún. normáltranszverzálisnak az egyenesek közé eső szakaszán mérjük. A 9.5.ábrán szemléltetjük a t távolságot, amelyhez két lépésben jutunk:

- Olyan i irányt szerkesztünk, mely a -ra is, meg b -re is merőleges. Ilyent kétféleképpen kaphatunk:
 - olyan síknak szerkesztjük meg a normálisát, amely a -val is, b -vel is párhuzamos, vagy
 - két síknak szerkesztjük meg a metszésvonalát, amelyek egyike a -ra, másika b -re merőleges.



9.4.ábra [9]



9.5.ábra [9]

Az ábrán a) szerint i az a -n átmenő és b -vel párhuzamos $[ab^*]$ -ra merőleges. A b^* egyenes a tetszőleges T pontján megy keresztül, és b -vel párhuzamos.

2. A kapott i -vel párhuzamos transzverzális szerkesztünk a -hoz és b -hez. Az a és az a -t p1. T -ben metsző, i -vel párhuzamos i^* határozza meg azt a síkot, amelyet b a B pontban metsz. Ezen megy keresztül i -vel párhuzamosan a t normáltranszverzális, amely a -t A -ban metszi. $AB = t$ a kitérő egyenesek távolsága.

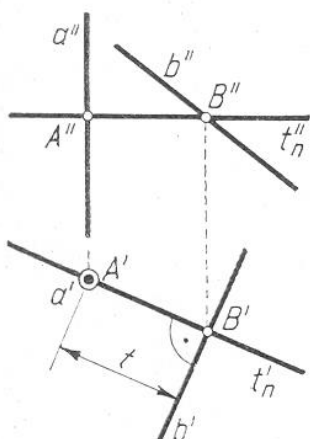
a) t az a és b egyeneseken keresztülfektethető egyetlen párhuzamos síkpárnak is a távolsága

b) a és b szögét az a és b^* által bezárt α szöggel mérjük

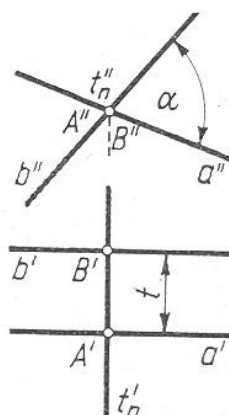
c) ha a kitérő egyenesek egyike vetítősugar, vagy mindkét egyenes ugyanazzal a képsíkkal párhuzamos, akkor távolságuk közvetlenül a képen rajzolható meg.

Legyen „ a ” első vetítősugar (9.6. ábra). Az a pontként megjelenő a' képén megy át tn' . Mivel tn az a -ra merőleges, ezért vízszintes helyzetű. Így tn merőleges b' -re. B' rendezőjén találjuk B'' -t és azon keresztül a'' -re merőlegesen, mely A'' -ben metszi a'' -t. Az ábrán $A'B' = t$.

Legyen a is, b is a K_2 -vel párhuzamos (9.7. ábra). A t tehát második vetítősugar, amelynek A és B pontjai második fedőpontpárok. Az a'' és b'' közös pontja $A'' - B''$, és ide esik $t''n$ is. A $t'n$ az A' és B' között találjuk a távolság valódi nagyságát, t -t. Az a és b szöge az a'' és b'' által bezárt α -val egyenlő.



9.6.ábra [9]

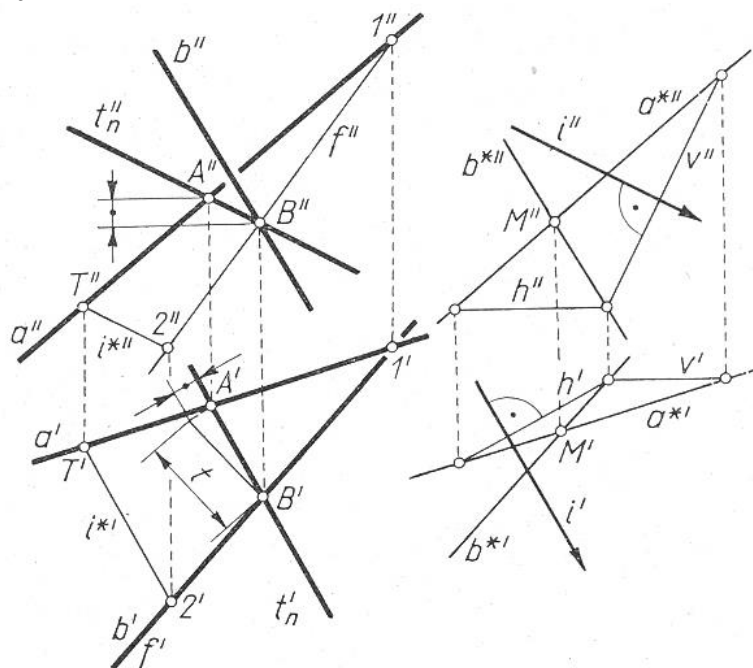


9.7.ábra [9]

Az általános helyzetű a és b kitérő egyenesek távolságát a szemléltető 9.8.ábra alapján szintén megszerkesztjük.

Az i irányt az ábra jobb oldalán határozzuk meg. A tetszőleges M -en a -val és b -vel párhuzamosan megrajzoljuk a^* -ot és b^* -ot. Az így kapott síkban felvesszük a h és v fővonalakat, majd az i' és i'' képeket.

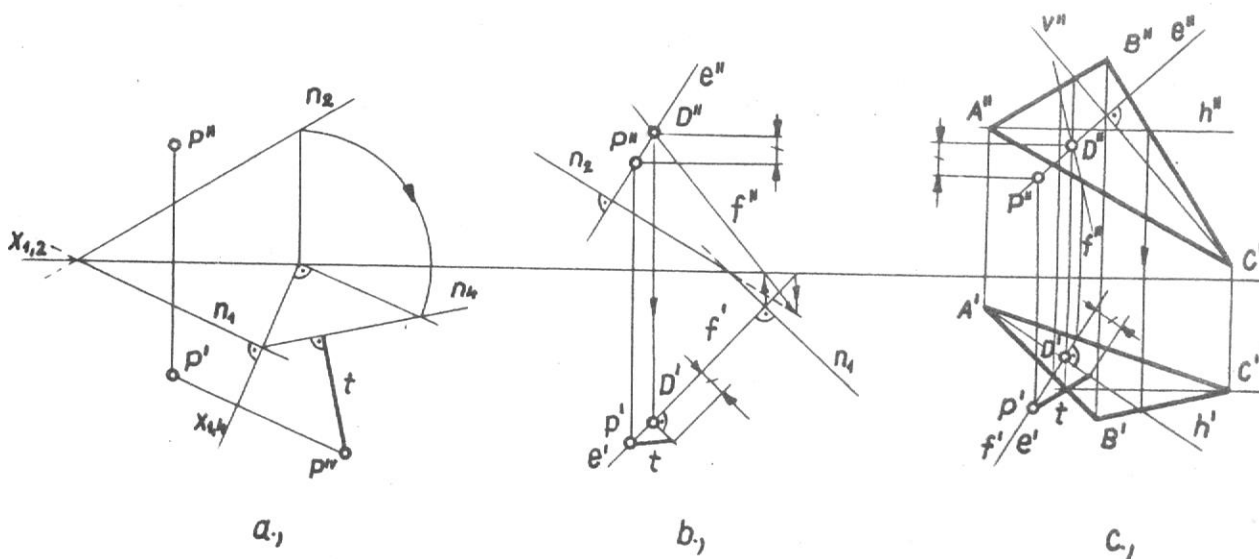
Azután a -nak és b -nek i -vel paralel $t''n$ transzverzálisát szerkesztjük meg. A T -n átmenő i^* az a -val azt a síkot határozza meg, amelyet b a B -ben metsz. Végül t -t, a távolság valódi nagyságát különbségi háromszöggel szerkesztjük.



9.8.ábra Kitérő egyenesek távolsága [9]

9.4. Pont és sík távolsága

Szerkesszük meg pont és sík távolságát (9.9.ábra). Az 9.9.ábra a) ábrán a feladatot céltranszformációval a 9.9.ábra b) és 9.9.ábra c) ábrán pedig általános szerkesztéssel oldottuk meg; vagyis P -n keresztül merőleges egyenest bocsájtottunk a síkra, megkerestük ennek a síkkal alkotott D dőléspontját, s végezetül megállapítottuk a PD szakasz valódi nagyságát.

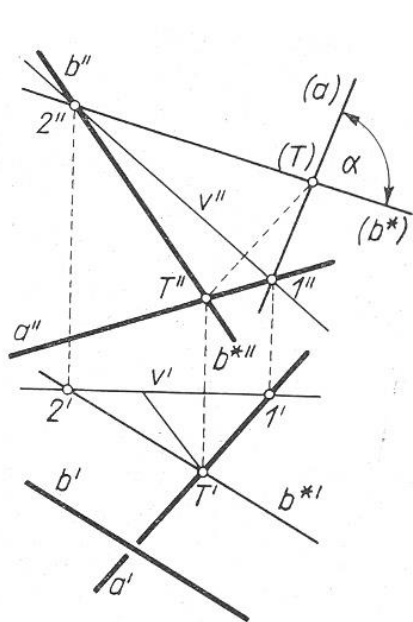


9.9.ábra Pont és sík távolsága [1]

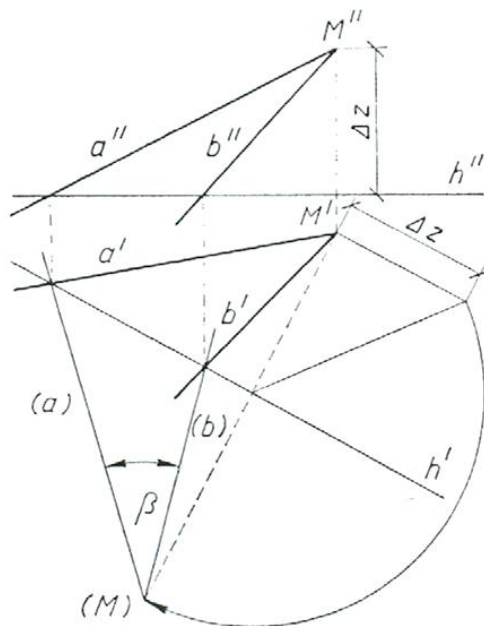
9.5. Két egyenes szöge

A 9.10.ábrán az a és b kitérő egyenespár szögét szerkesztjük meg valódi nagyságban. Az értelmezés szerint egymást metsző egyenesek szögét szerkesztjük.

Legyen T'' célszerűen az a'' és b'' közös pontja, és T' legyen $a'-n$. T -n keresztül a b -vel párhuzamos b^* és a szögét kell megszerkesztenünk. A szögcsúcsok síkjában felvesszük a v fővonalat, és v körül a szögcsúcsokat főállásba forgatjuk. T forgatási derékszögű háromszögét bejelöltük. A helyben maradó $1''$ -en és $2''$ -n mennek keresztül a keresett α -t bezáró (a) és (b^*) szögcsúcsok.



9.10.ábra [9]



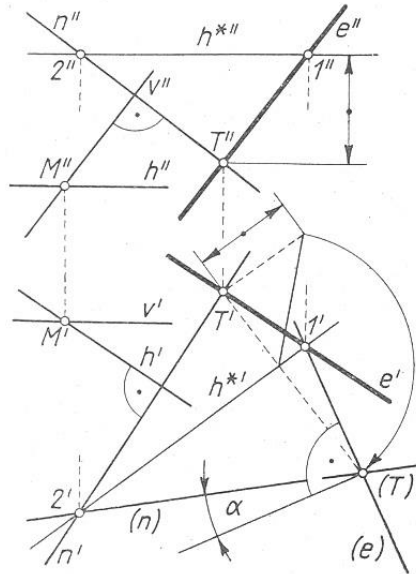
9.11.ábra [9]

Két egyenes szöge

Két metsző egyenes szöge általában egyik képen sem látszik valódi nagyságban. A szög valódi nagyságát úgy szerkeszthetjük meg, hogy a két egyenes síkját valamelyik képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk. A 9.11.ábrán az a és b egyenes síkját a h fővonal körül az első képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk. A két egyenes szöge: β .

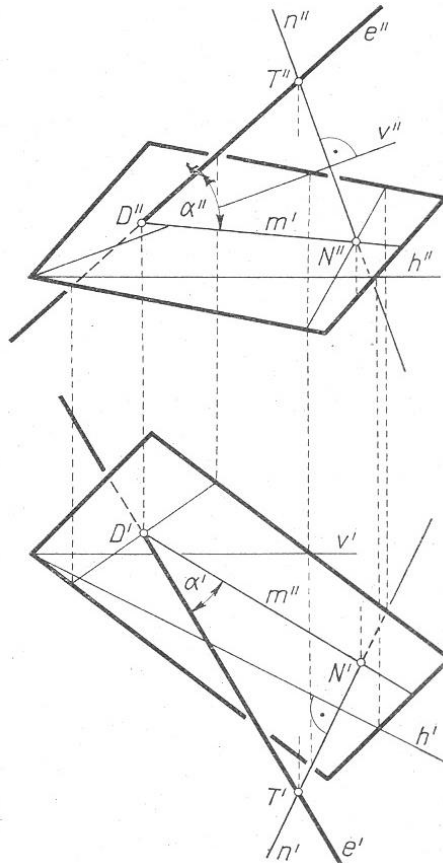
9.6. Sík és egyenes szöge

Egyenes és általános helyzetű sík szögének pótszögét szerkesztjük meg a 9.12.ábrán. Az e -n felvett tetszőleges T -ből megrajzoljuk a sík n normálisát. Azután az $[en]$ síkot a benne felvett h^* fővonal körül főállásba forgatjuk. Az itt kapott pótszöget 90° -ra egészíti ki a két térelem α szöge.



9.12.ábra Sík és egyenes szöge [9]

A következő példában az e egyenesnek egy paralelogramma síkjával bezárt szögét szerkesztjük meg a 9.13.ábrán. Az e tetszőleges T pontjából az idom n normálisát rajzoljuk meg. Az idomon e -nek, ill. n -nek a D , ill. N dőféspontját az m merőleges vetület köti össze. Végül az e és m szögcsárak síkját kellene még főállásba leforgatnunk, hogy az α szög valódi nagyságát megkapjuk.

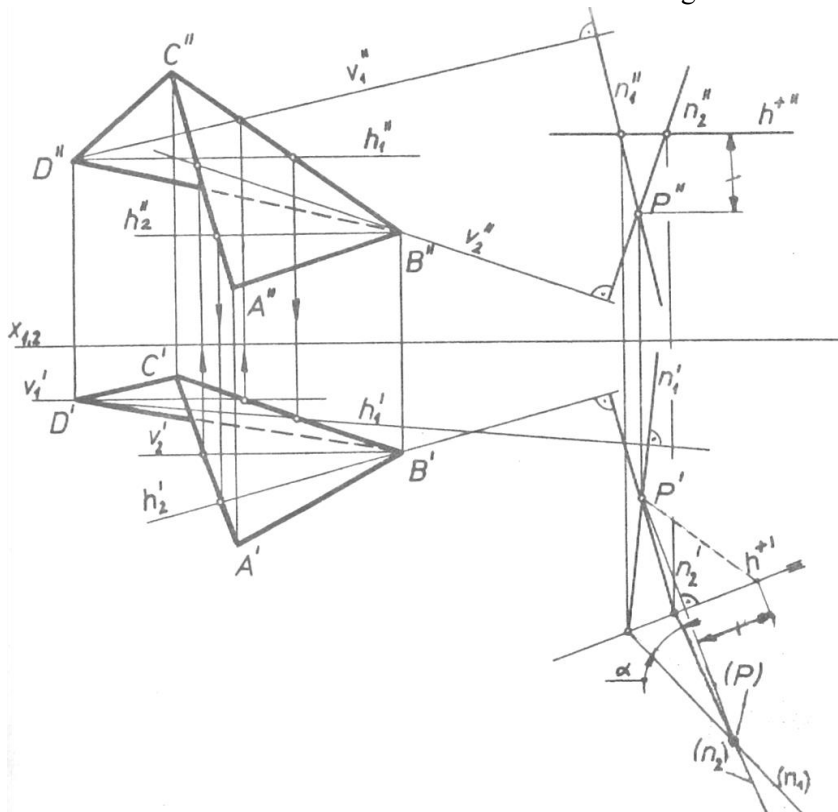


9.13.ábra Sík és egyenes szöge [9]

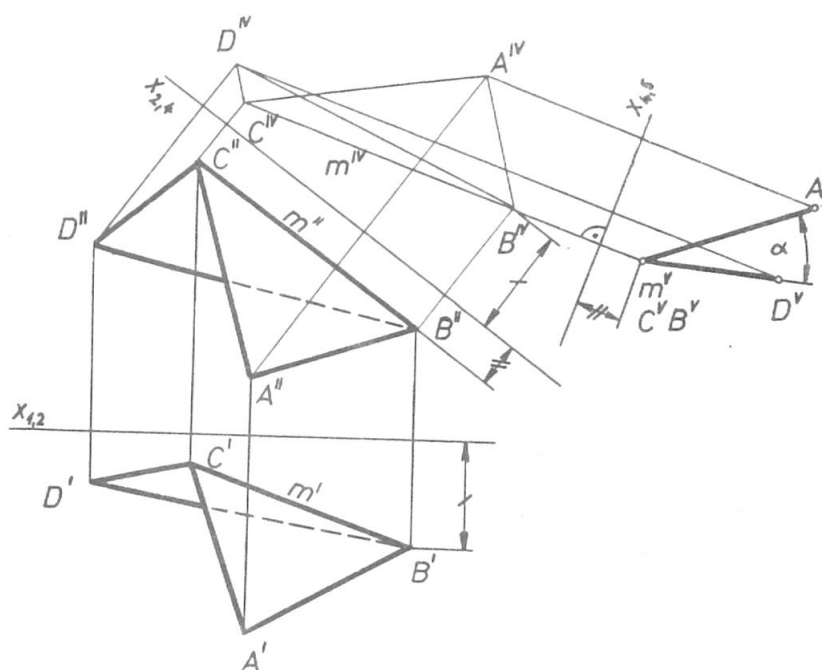
9.6. Két sík hajlásszöge

Szerkesszük meg az 9.14. ábrán látható ABC és BCD háromszögek síkjának hajlásszögét.

- Először mindkét síknak felvettük a h_1 és v_1 illetve h_2 és v_2 fővonalát, majd a tér tetszőleges P pontján keresztül a normálisait. A normálisok síkját a h^+ fővonal körül a K_1 -el párhuzamos helyzetbe forgattuk, ahol a két sík α hajlásszöge valódi nagyságban látható.
- A 9.15. ábrán az előbbi feladatot kétszeres transzformációval oldottuk meg.



9.14. ábrán Két sík hajlásszöge [1]



9.15. ábrán Két sík hajlásszöge [1]

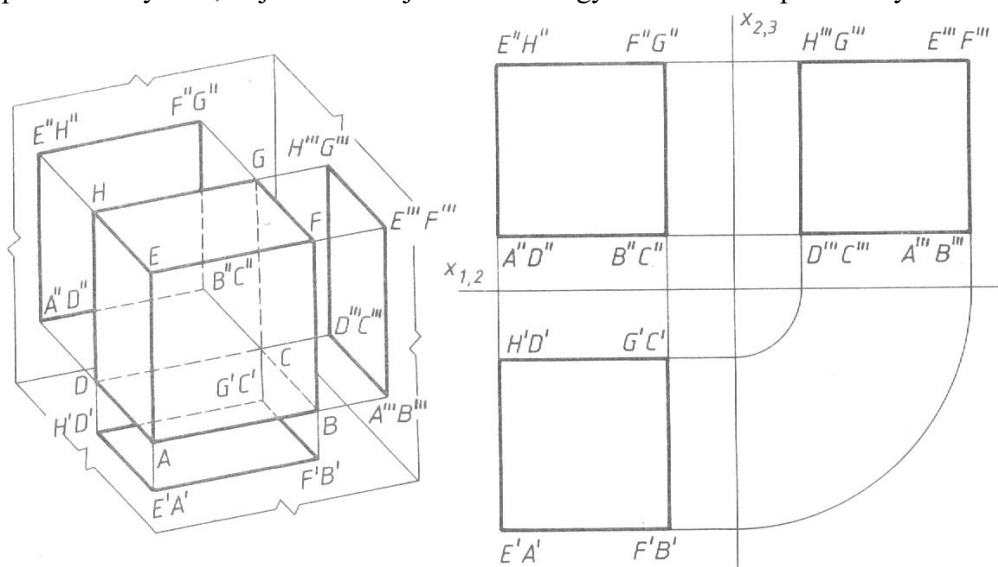
10. TESTEK ÁBRÁZOLÁSA

10.1. Síklapú testek.

10.1.1. A kocka ábrázolása

A kocka az egyik legegyszerűbb térbeli forma, így a testek vetületi ábrázolásának értelmezéséhez a legalkalmasabb. A kocka mögé képzeljünk el egy függőleges képsíkot (K_2), a képsíkra merőleges vetítősugarak meghatározzák a kocka előlnézetét. A szabályos beállításból adódik, hogy a kocka csúcsai a vetítési irányban fedőpontokat alkotnak, így a kocka vetülete azonos alakú és méretű lesz a vetítés irányába eső négyzetes oldallappal. A csúcsok vetületének jelölési rendszere mutatja a fedőpontokat, ugyanakkor láthatjuk azt is, hogy a kocka vetítési irányba eső kiterjedését a vetülete nem tudja érzékeltetni.

Az előlnézethez hasonló képalkotási szabályok érvényesülésével megrajzolható a kocka a két- vagy a háromképsíkos rendszerben is. A képalkotás törvényeinek értelmezésére rajzoljuk meg a kocka vetületeit a háromképsíkos rendszerben, ahogy azt a 10.1. ábra mutatja. Az egyes vetületek képzése megegyezik az előlnézet képzési szabályaival, és jelölési rendjük követi az egyes vetületek képzési irányát.

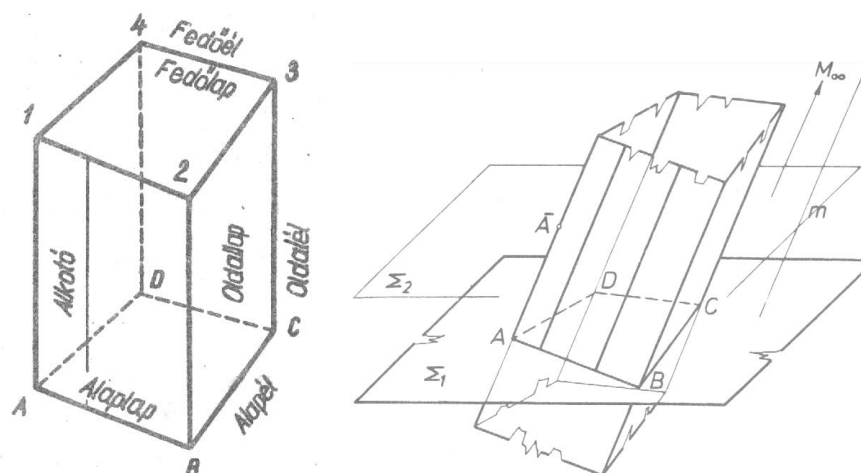


10.1. ábra A kocka háromképsíkos merőleges vetületének képzése [8]

10.1.2. A hasáb ábrázolása

Ha egy egyenest (alkotót) önmagával párhuzamosan úgy mozgatunk, hogy közben valamely vezérpolygon kerületének egymásután következő pontjait érinti, hasábfelület keletkezik. Két egymással párhuzamos sík a hasábfelületet két egymással párhuzamos síksokszögben metszi. E sokszögek síkja, valamint a hasábfelületnek a metszősíkok közé eső darabja által határolt véges térrészt: hasábnak nevezzük. A hasábot a két sokszög: alap és fedőlap és annyi, parallelogramma oldallapok határolják, mint ahány oldalú a vezérpolygon. Az oldalak száma szerint a hasáb lehet 3, 4...n oldalú. Beszélünk a hasáb éleiről (alap-, oldallap-, fedőél), magasságáról, egyenes és ferde hasábról. Egyenes állású a hasáb, ha az oldalélek az alaplap síkjára merőlegesen állnak (10.2. a ábra). Ha az oldalélek nem merőlegesek az alaplap síkjára, a hasáb ferde állású. (10.2. b ábra).

A hasáb meghatározásához általában szükséges, hogy az alaplap síkmértanilag meghatározott legyen, ezenkívül egyik oldalél irányának, továbbá hosszának, a hasáb magasságának ismerete szükséges. Szabályosnak mondjuk a hasábot akkor, ha az alaplapja szabályos sokszög.

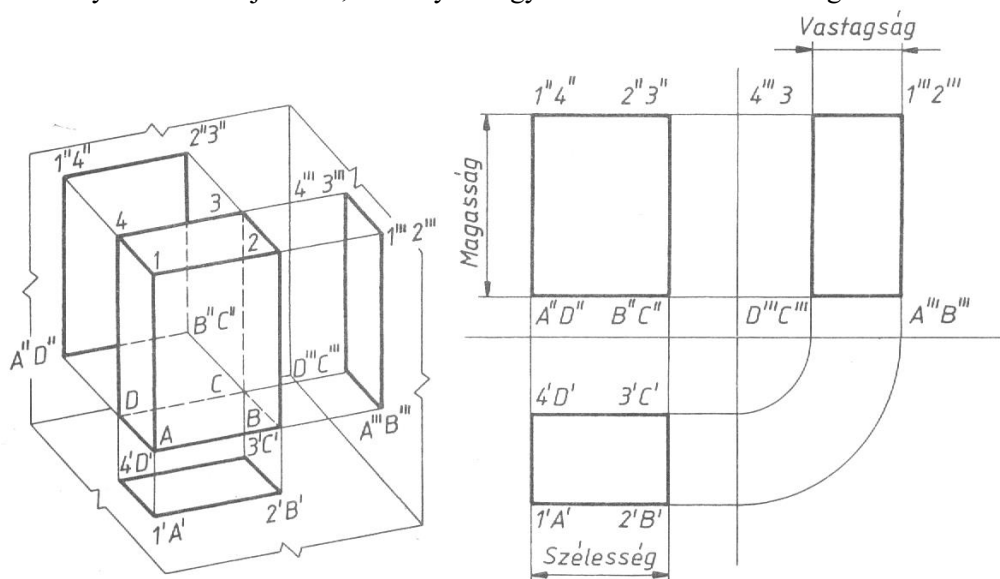


a) A hasáb származtatása b) A ferde hasáb származtatása

10.2. ábra [12]

A hasáb vetületeit a háromképsíkos rendszerben a 10.3.ábra mutatja. A vetületek képzésén, a csúcsok számozásán túl a hasáb szélességi, magassági és vastagsági jellemzőjét is megadtuk. Jól látható, hogy egy-egy vetület a hasáb két geometriai jellemzőjét tudja megmutatni. Így az előlnézet a hasáb magasságát és szélességét, a felülnézet a hasáb szélességét és vastagságát, az oldalnézet pedig a hasáb vastagságát és magassági méretét adja meg.

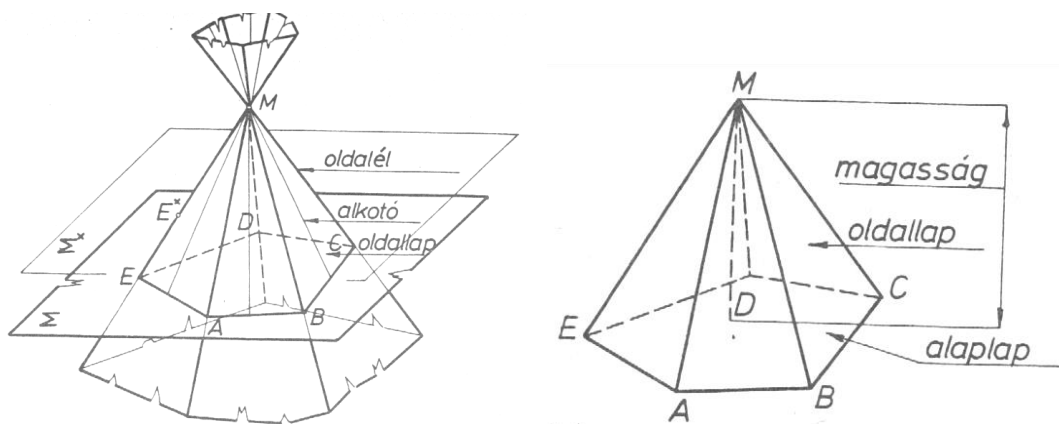
A hasáb méreteit megadó három kiterjedés két összetartozó vetületről meghatározható. Az ipari formákról csak annyi vetületet rajzolunk, amennyi az egyértelmű alak és méretmegadáshoz szükséges lesz.



10.3.ábra A hasáb háromképsíkos merőleges vetületének képzése [8]

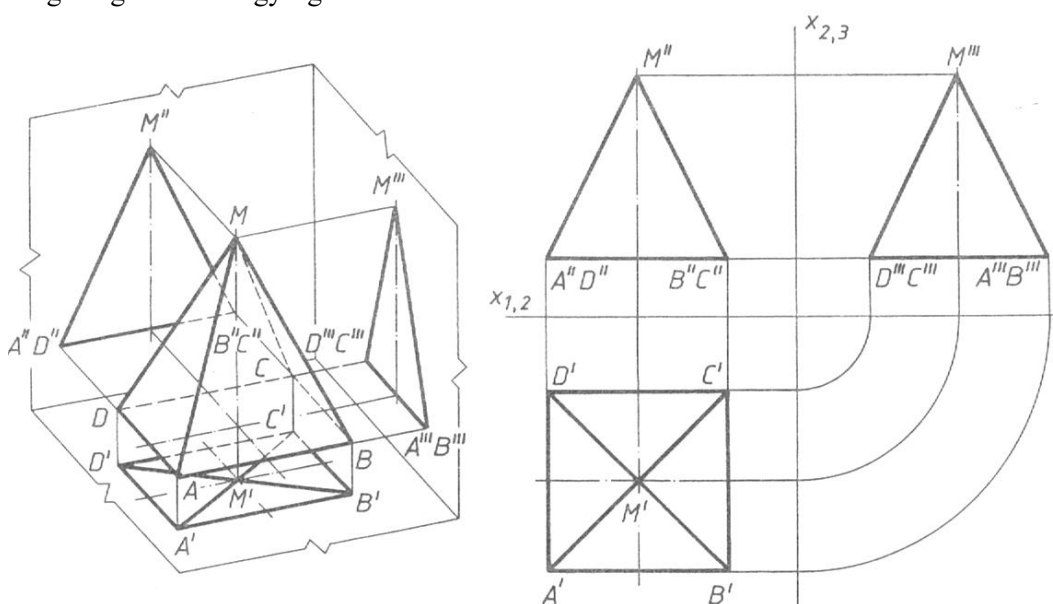
10.1.3. A gúla ábrázolása

A gúla szintén síklapokkal határolt térgeometriai forma, aminek alaplapja tetszőleges sokszög, oldal-lapjai pedig háromszögek. Oldaléle egy pontba, a gúla csúcspontjába futnak össze. Ha a gúla alaplapja szabályos sokszög, és csúcspontja a sokszög középpontjára bocsátott merőleges egyenesen van, szabályos egyenes gúláról beszélünk. Ezt szemlélteti az 10.4.ábra és definiálja a gúla geometriai részeit, melyeket vetületeiben is ábrázolunk. Amennyiben a gúla csúcspontja az előbb említett helyzettől eltér, ferde gúláról beszélünk (10.6.ábra).

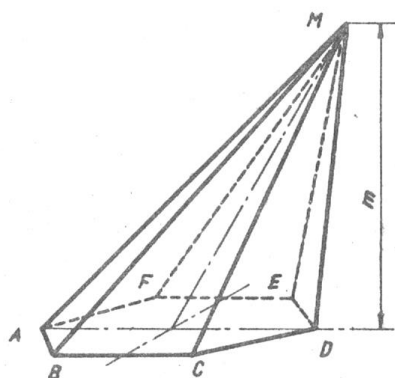


10.4.ábra A gúla képzése és geometriai leírása [12]

Az alapsokszög oldalainak száma szerint a gúlának lehetnek háromoldalú, négyoldalú, ötoldalú, hatoldalú, n oldalú gúlának - amelyek rajzai szerepelnek a tankönyvben ettől eltérő esetben, a hasábokhoz hasonlóan, szintén az alapsokszög oldalainak száma adja a gúla megnevezését. A gúla oldallapjainak metszészvonalát oldaléleknek nevezzük. Az alapsokszög területét a csúccsal összekötő egyenes szakaszok a gúla alkotói. A négyzet alapú gúla vetületeit a háromképsíkrendszerben a 10.5. ábra mutatja. Az ábrán látható a gúla helyzete a képsíkokhoz viszonyítva, a képalkotás szemléltető képe és eredménye a három vetület. A gúla felülnézete az alaplapp nagyságával azonos. Az előlnézeten és az oldalnézeten a gúla oldallapjai és oldaléles nem látszanak valódi nagyságukban, mivel a vetítés irányára nem merőlegesek. Az utóbbi két vetületen csak a gúla testmagassága valódi nagyságú.



10.5.ábra A gúla háromképsíkrendszerben merőleges vetületének képzése [8]



10.6.ábra A ferde gúla [4]

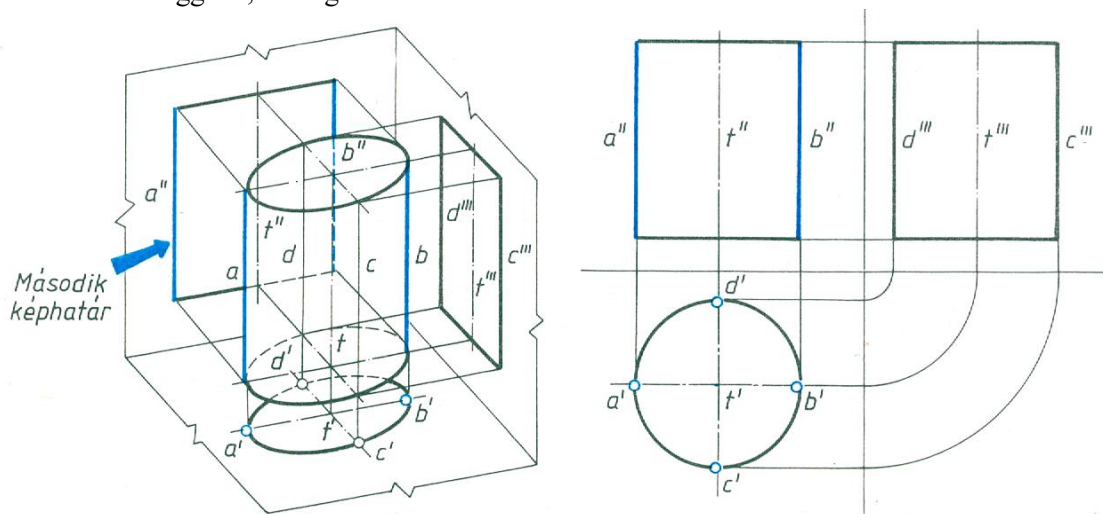
10.2. Forgástestek ábrázolása

10.2.1. A henger ábrázolása

Ha egy egyenest (alkotót) önmagával párhuzamosan egy g görbe (vezérvonal) mentén mozgatunk, hengerfelület keletkezik. Ha a vezérvonal zárt, akkor a hengerfelület is zárt, ha nyitott, akkor a hengerfelület is az. Így beszélhetünk elliptikus, parabolikus stb, hengerekről.

Két párhuzamos sík a hengerfelületet egybevágó görbékben metszi. E görbék síkja, valamint a hengerfelületnek e két metszősík közé eső darabja által határolt síkrészt hengernek nevezzük. Felületét az alaplap, fedőlap és a palást alkotja. A henger egyenes állású, ha alkotói merőlegesek az alap síkjára, egyébként ferde állású.

Azt a hengert, amelynek vezérgörbéje kör és alkotói a vezérkör síkjára merőlegesek, egyenes körhengernek, vagy forgáshengernek nevezzük (10.7.ábra). Ábrázolásuk az ismert vetítési eljárással történik. Meghatározzuk az alap, a fedőlap és a kontúralkotók képeit. Ha ezeket olyan sorrendben rajzoljuk meg, amint a testen összefüggnek, a hengert ábrázoltuk.



10.8.ábra A henger háromképsíkú vetületei [8]

Ferde körhenger kifejtésénél ugyanolyan módon járunk el, mint a ferde hasábok kifejtése esetén. Ha a henger alkotói nem párhuzamosak valamelyik képsíkkal, akkor transzformációval főegyenesekké alakítjuk. Ha már a ferde körhenger alkotói főegyeneseek, akkor megszerkesztjük a henger normálmetszetét, mely ferde körhengernél ellipszis lesz. Azért van szükségünk az alkotókra merőleges síkú metszetre, mert ennek kifejtése egyenes lesz.

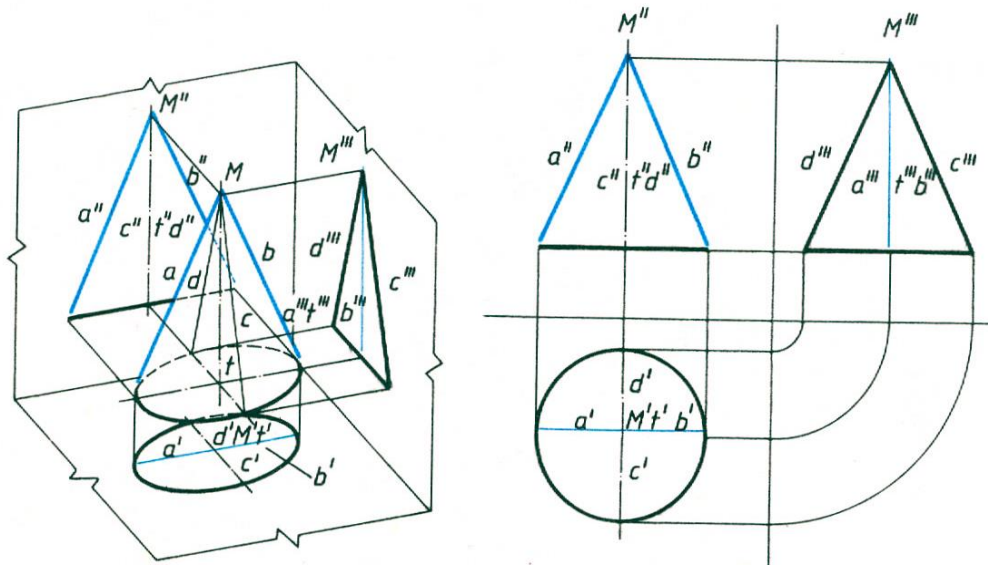
10.2.2. A kúp ábrázolása

Ha egy rögzített ' M ' ponton átmenő a egyenest úgy mozgatunk, hogy közben egy adott ' g ' görbének minden egyes pontját érinti, kúpfelület keletkezik (10.9.ábra). Az ' M ' pont a kúp csúcsa, (ami egyébként a kúpfelületet két részre osztja) a ' g ' görbe a kúp vezérgörbéje, a mozgó egyenes a kúp alkotója. A ' g ' görbétől függően sokféle kúp keletkezik.

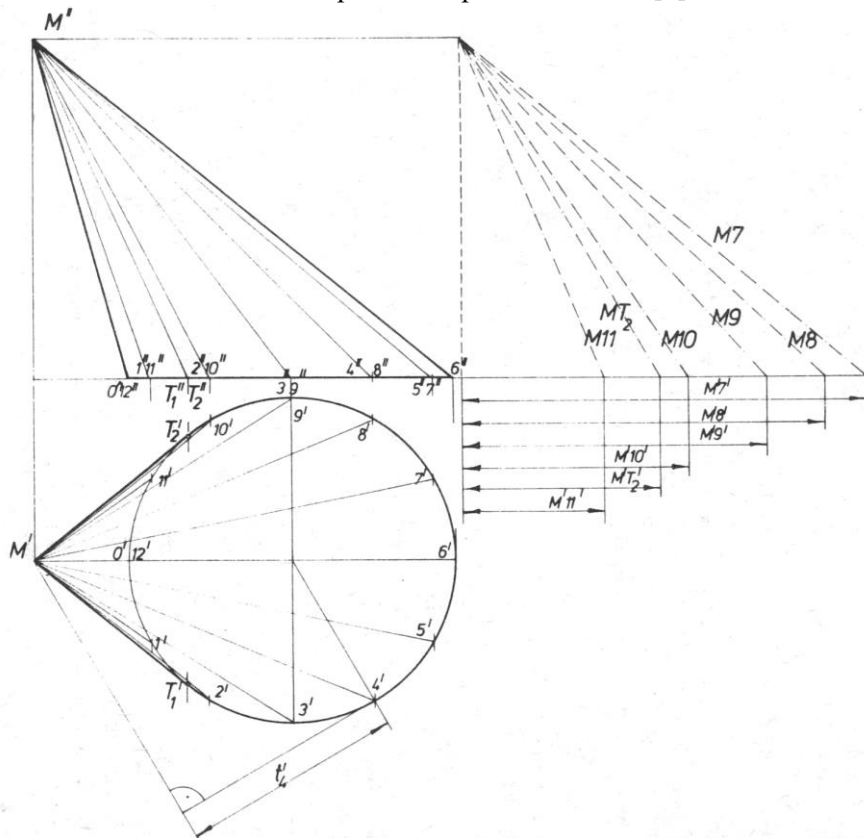
A kúp képeit a már ismertetett vetítési eljárással határozzuk meg. Ha a kúp ' M ' csúcsának vetületét az alap egyenű vetületének pontjaival összekötjük, nyerjük az egyes alkotók vetületét. Ezek közül csak azt kell feltüntetni, amelyek a kúp vetületének szélére, kontúrvonalára esnek. Így létezik első, második, stb. kontúralkotó. Az egyenes körkúpot két adata, pl. alapkör és magasság, magasság és félszögnyílása, stb. határozza meg.

A ferde kúp esetében az alkotók metszéspontja nem az alapkör közepére illeszkedő merőleges forgástengelyen adott magasságában helyezkedik el. A tengely az alapkörrel valamilyen szöget zár be. Ezáltal az alkotók egyik vége a csúcspontban metsződik, míg a másik végük meghatározott távolságban illeszkedik az alapkör adott pontjaira. Ebből eredően az alkotók hossza (attól függően, hogy mennyi alkotóra

osztjuk a palástot) különböző hosszúságúak lesznek. Meghatározásuk az előző fejezetekben tárgyalt rotációval történik (10.10.ábra).



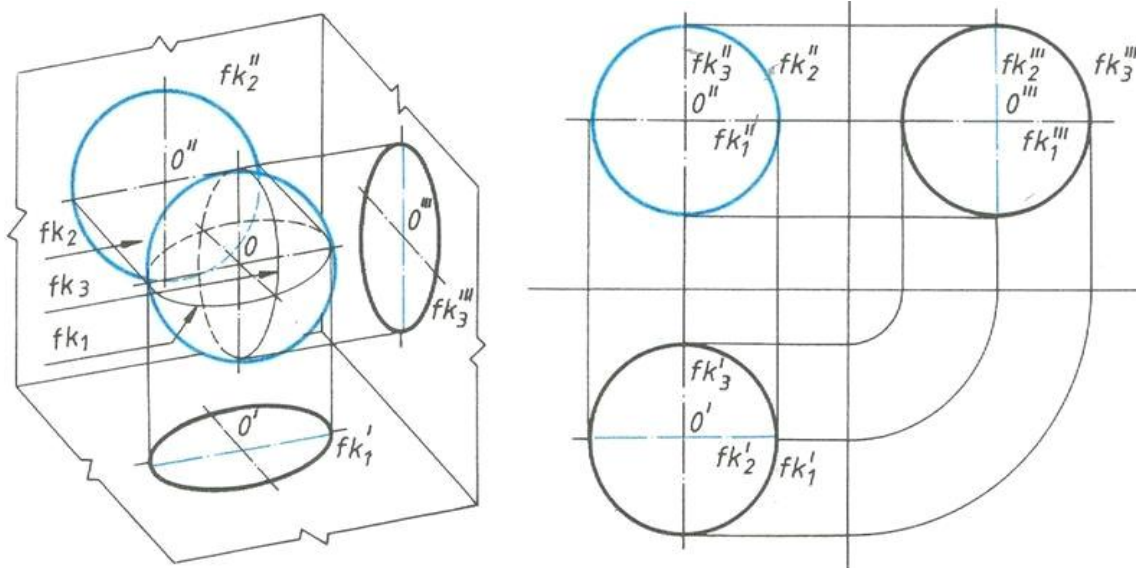
10.9.ábra Kúp háromképsíkös vetületei [8]



10.10.ábra Ferde gúla vetületei [12]

10.2.3. A gömb ábrázolása

A gömb merőleges vetülete kör, melynek sugara egyenlő a gömb sugarával. Ha a gömb középpontjának képeit O' , O'' , O''' -t kijelöltük és ezek köré a gömb sugarával egyenlő sugarú köröket rajzoltunk, a gömböt ábrázoltuk. Mivel a gömb meridiángörbéi a legnagyobb körök, így a gömb képei a meridiángörbével egyenlő körök. Ha a gömböt a képsíkokkal párhuzamos síkokkal úgy metsszük el, hogy a metsző sík a középpontot is tartalmazza, akkor éppen azokat a köröket nyerjük, amelyeknek első, második és harmadik képe egyben a gömb első, második és harmadik kontúrját adja (10.11. ábra).



10.11.ábra Gömb vetületei és ábrázolása [8]

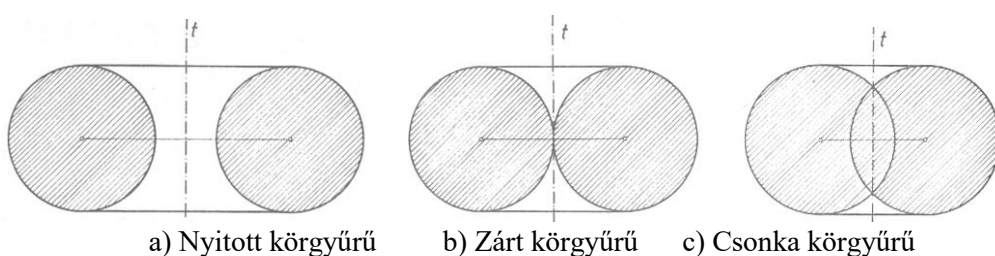
A gömb középpontján átmenő síkon jelentkezik a legnagyobb gömbi kör, amit főkörnek nevezünk. A gömb főkörének sugara egyenlő magának a gömbnek a sugarával.

Az egyes képsíkokra merőleges vetítősugarak a gömböt a főkörei - kontúrkörei - mentén érintik. A kontúrkörök vetületei határolják a gömb nézeteit a háromképsíkos rendszerben. Az első képsíkkal párhuzamos legnagyobb gömbi kört első főkörnek nevezzük, jele fk_1 . A második képsíkkal párhuzamos legnagyobb gömbi kört második főkörnek nevezzük, jele fk_2 és a harmadik képsíkkal párhuzamos legnagyobb gömbi kört harmadik főkörnek nevezzük, jele fk_3 .

10.2.4. A körgyűrűfelület (tórusz) származtatása és ábrázolása

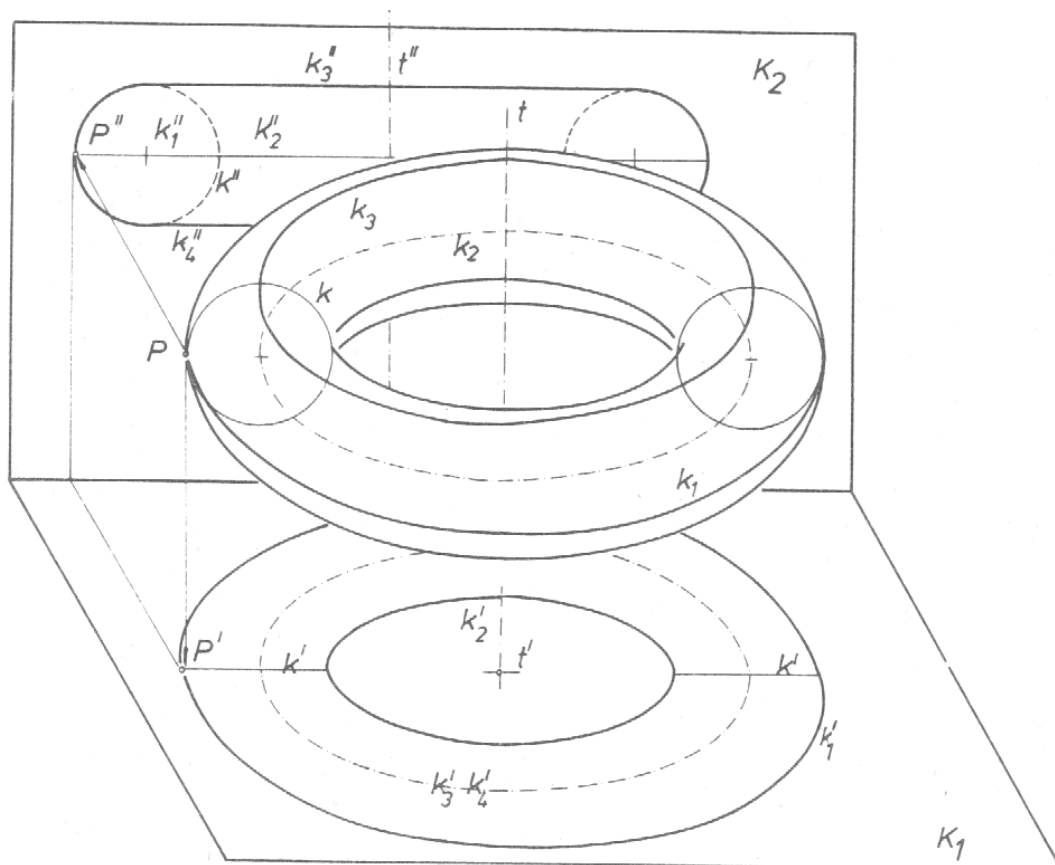
Tóruszfelület vagy- körgyűrűfelület akkor keletkezik, amikor egy kört a síkjában fekvő, de nem a középpontján átmenő egyenes körül megforgatunk. A felület három típusát különböztetjük meg:

- 1) a körgyűrű nyitott, ha a leírókör a tengelyt nem metszi (10.12.a. ábra),
- 2) zárt, ha érinti (10.12.b. ábra) és
- 3) csonka, ha két pontban metszi (10.12.c. ábra).



10.12.ábra Tórusz [12]

A 10.13.ábrán egy első képsíkra merőleges tengelyű nyitott tórusz látható. Az ábrán láthatóak a vetületeik is. Az K_2 -ben a leírókört körnek látjuk. Ennek a körnek a forgástengelytől legtávolabbi pontja írja le a felület legnagyobb sugarú párhuzamos körét, k_1 ekvátorkört, a forgástengelyhez legközelebb fekvő pontja pedig a felület legkisebb párhuzamos körét a k_2 torokkört.



10.13.ábra Nyitott körgyűrű és vetületei [12]

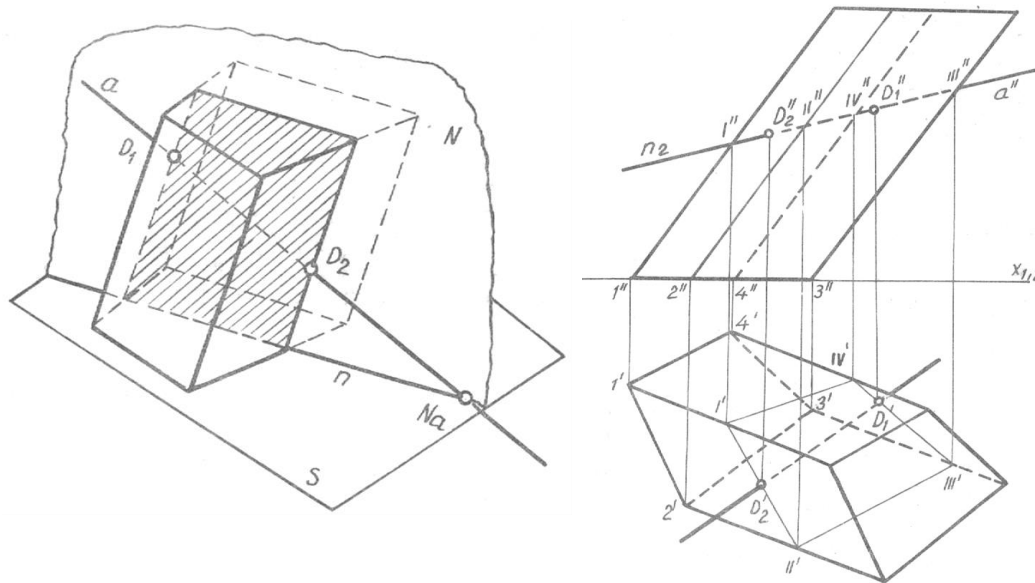
Ha a testet leíró meridiángörbének nincs a felület tengelyével párhuzamos érintője, akkor nincs sem torokkör, sem egyenlítőkör (ekvátorkör). A leírókör forgástengellyel párhuzamos átmérőjének két végpontja a felület k_3 legfelső és k_4 legalsó körét írja le.

11. TESTEK DÖFÉSE EGYENESSEL

11.1. Síklaú testek dőfése

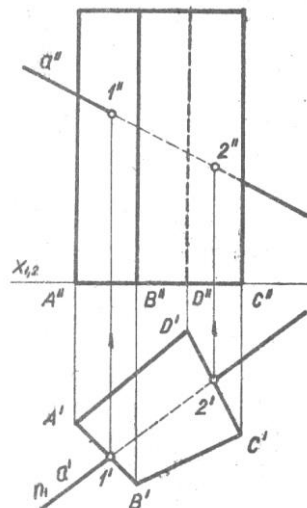
11.1.1. Hasáb dőfése

Annak meghatározására, hogy az egyenes hol dőfi át a hasáb felületét, általános eljárás az, hogy az egyenesen keresztül egy síkot fektetünk, amely a testből egy idomot metsz ki. Az idom és egyenes közös pontjai a keresett dőféspontok. Pl.: K_1 -en álló ferde hasáb és általános helyzetű egyenes dőféspontjainak szerkesztése (11.1.ábra).



11.1.ábra Ferde hasáb dőfése [2]

Az egyenesen áthaladó második vetítősík (n_2 egybeesik a'' -vel), a hasábot I, II, III, IV - négyszögben metszi, melyet az a - egyenes mint az első képen látható, D_1' és D_2' pontokban metsz. Ezek a pontok az a egyenesnek és a hasáb felszínének közös pontjai. E pontok második képeit vetítéssel nyerjük. Utolsó lépésként megállapítjuk a láthatóságot is, pl. a fedőpontok vagy a vizuális módszerrel.

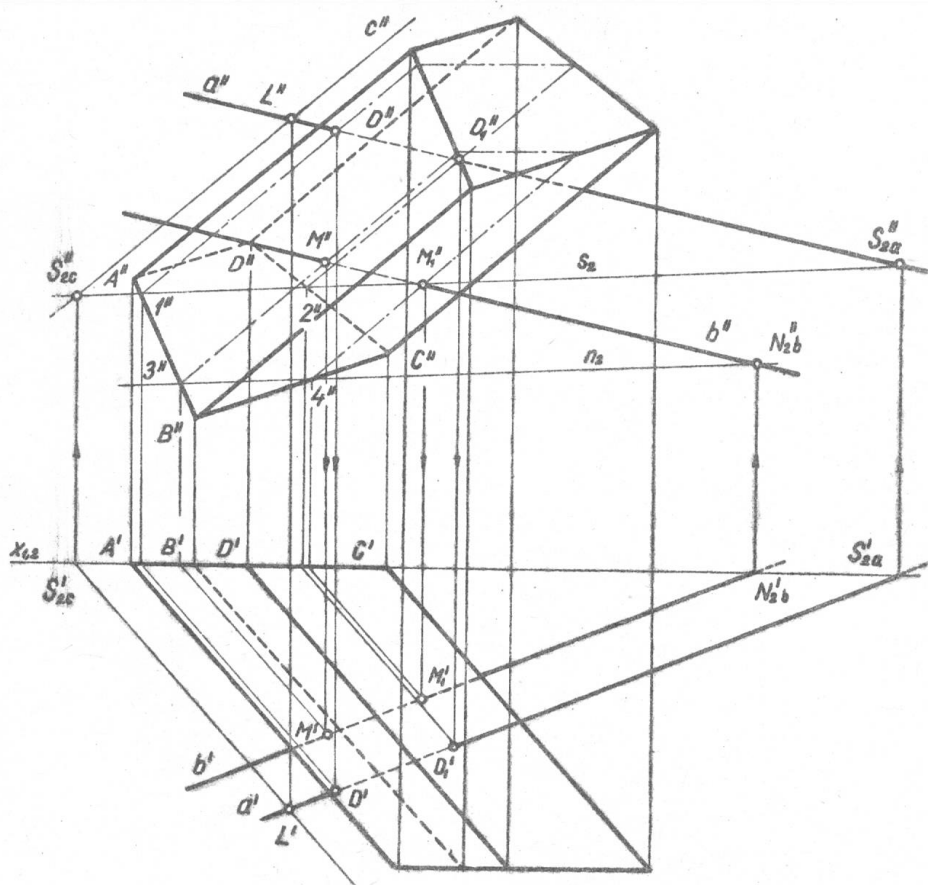


11.2.ábra Egyenes hasáb dőfése [2]

A 11.2.ábrán adva van: K_1 -en fekvő egyenes hasáb és általános helyzetű a egyenes első és második képével. A feladat megoldása ebben az esetben igen egyszerű, mert az a egyenesen átfektetett első vetítősík n_1 , nyomvonala a' -be esik, s ahol metszi a hasáb első képét alkotó $A'B'C'D'$ általános négyszöget kapjuk az egyenes és hasáb dőféspontjainak első képeit: $1'$ -t és $2'$ -t. A második képeket vetítéssel nyerjük.

11.3.ábrán K_2 -ön álló ferde hasáb és egymással párhuzamos, de a képsíkokhoz viszonyítva általános helyzetű a és b egyenesek dőféspontjait kell megszerkeszteni.

Ha több általános helyzetű, vagy párhuzamos egyenesnek (feladatunkban az utóbbi van adva) pl. a és b -nek az adott ferde hasábbal való metszéspontjait kell meghatároznunk, akkor nem célszerű az egyeneseken vetítősíkokat átfektetni, hogy azután az egy síkban fekvő egyenesnek és hasábmetszetnek közös pontjaiban a dőféspontokat lássuk, - hanem ajánlatosabb mindegyik egyenesen oly síkot átfektetni, amely a hasáb oldaléleivel párhuzamosan húzható s így a hasáb oldallapjait alkotókban metszi. Az a egyenesen átfektetett ilyen sík magában foglal egy olyan c egyenest, mely az a egyenes bármely pl. L pontjából a hasáb oldaléleivel párhuzamosan húzható s, ha megszerkesztjük az a és c metszőegyeneseinek által alkotott sík nyomvonalát (példánkban: s_2), - mely a hasáb alapsíkján, itt: K_2 -ön S''_{2a} és S''_{2c} nyompontokon halad át, a hasáb alapkerületét: $1''$ és $2''$ -ben metszi, az ezekből húzott alkotókban a segédsíknak a hasáb oldallapjaival való metszetét nyerjük, s ezeknek az „ a ” egyenessel való metszéspontjai adják a keresett dőféspontokat: D és D_1 -et.



11.3.ábra Ferde hasáb dőfése [4]

Ha a b egyenes általános helyzetű lenne, akkor a fenti eljárással keresnénk meg az áthatási pontokat. De példánkban a b párhuzamos a egyenessel, tehát a rajta átfektetett: N sík párhuzamos a és c egyenesek által alkotott síkkal is, amelyből következik, hogy n_2 nyomvonal s_2 -vel párhuzamos, mely ugyancsak metszi a hasáb alapkerületét: $3''$ és $4''$ -ben. A további eljárás egyezik a D illetve D_1 pontok meghatározási módjával, s így kapjuk a b egyenes M és M_1 dőféspontjait.

A szerkesztés menete az elmondottak figyelembevételével, valamint a rajz láthatóság szerinti kihúzása az ábrából leolvasható.

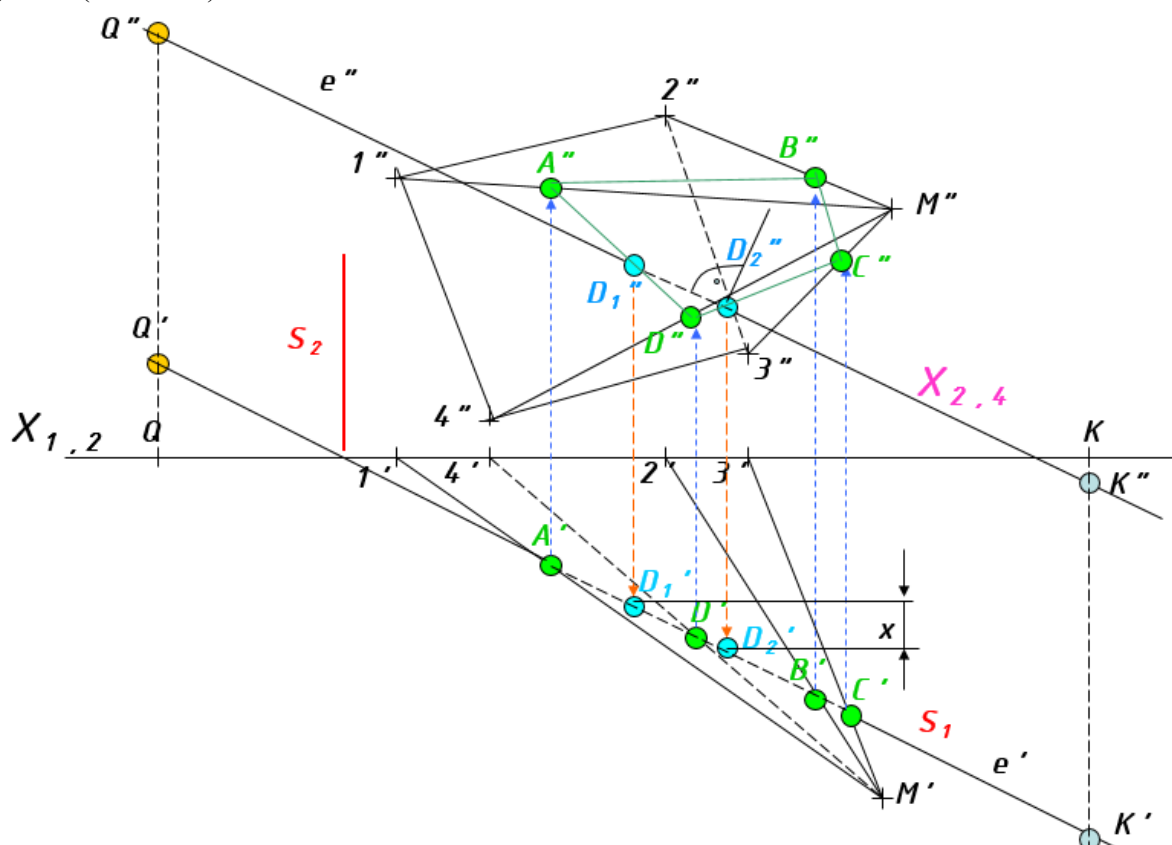
67

Megszerkesztjük a segédsíknak az alaplap síkjával való metszészonalát, (S_1 -et), amely az alapterület (négyszög) $1'$ és $2'$ pontokban, a segédsík pedig a gúla felületének első képét $1''M'$ és $2''M''$ alkotókban metszi. Ahol az alkotók a g' -t metszik, kapjuk a dőféspontok első képeit, G' -t és K' -t.

A második képet vetítéssel szerkesztjük meg. A láthatóságot úgy állapítjuk meg, hogy mivel G és K áthatási, vagy dőféspontok látható oldalakon helyezkednek el, ezért a g egyenes nevezett pontokig látható és csak a testekben lévő része láthatatlan. Azaz takart vonalaknak megfelelően vékony szaggatott vonallal húzzuk ki.

Adott egy K_2 képsíkra illeszkedő $ABCD$ alapú és M csúcsával jelzett gúla a 11.6.ábrán. Ugyancsak adott egy 'e' egyenes, ami a Q és K pontokra illeszkedik. A pontok helye: Q pont: $-K_1$ -től 80mm-re, $+K_2$ -től 10mm-re. K pont: $+K_1$ -től 5mm-re, $-K_2$ -től 60mm-re. Határozza meg a gúla és az egyenes dőféspontját, valamint a gúla és az egyenes láthatóságát! A dőféspontok valódi távolságát különbségi háromszög módszerével mutassa meg! (szerkessze meg a gúla kiterített hálóját a dőféspontok feltüntetésével!)

Megoldás: (előadáson)

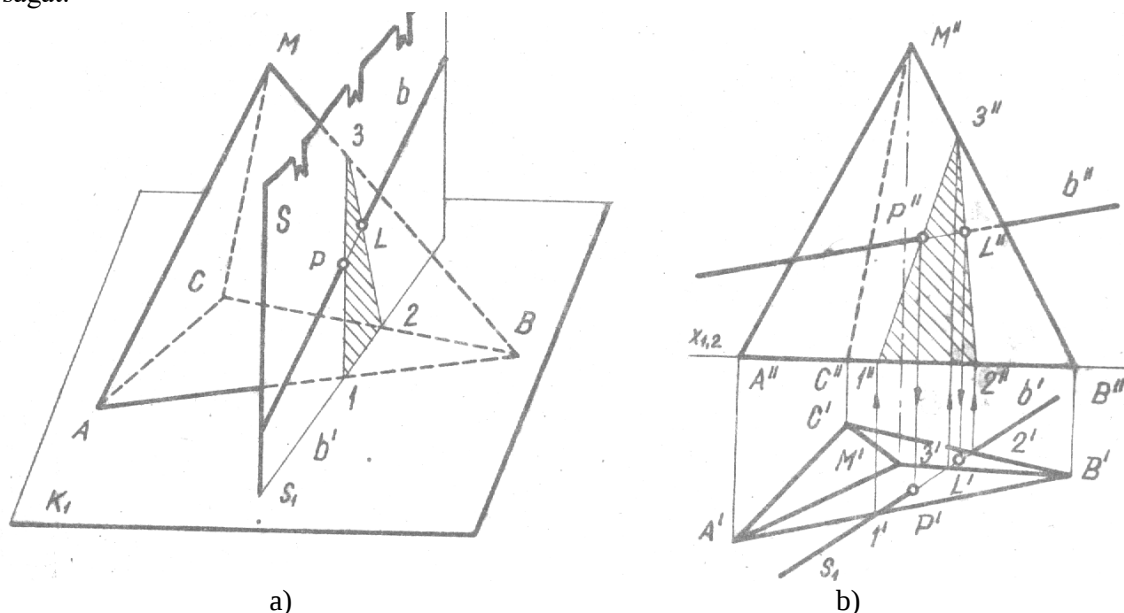


11.6. ábra Ferde gúla dőfése

Ha meg akarjuk szerkeszteni egy síklapu test- jelen esetben gúla - és egy egyenes dőféspontjait, a következőképpen járunk el:

- az egyenesre valamilyen vetítősíkot fektetünk; /pl. a 11.7.a. ábrán b egyenesen át első vetítősíkot fektettünk/,
- megrajzoljuk a vetítősík és a test lapjainak metszészonalait,
- a metszészonalak metszik az egyenest, ezek a metszéspontok az egyenes dőféspontjai a testen;
- megállapítjuk a láthatóságot fedőpontpárok módszerével.

A 11.7.b. ábrán a fentiek szerint szerkesztettük meg a dőféspontokat és állapítottuk meg az egyenes és gúla láthatóságát.



11.7.ábra Egyenes gúla dőfése [4]

- Ha a metszésvonalak az egyenest nem metszhetik, az egyenes nem metszi a testet.
- Ha az egyenes metszi a testet, két metszéspontot kell kapnunk, - egyet, ahol bemegy, egyet, ahol kijön a testből (D_1 és D_2 dőféspontok).
- Ha az egyenes a test valamelyik lapját egy pontban metszette, ugyanazt a lapot más pontban már nem metszheti.

Abban az esetben, ha a test egyes lapjai vetítősíkok, vagy képsíkokba eső lapok (hasáb esetében előfordulhat), a dőféspont szerkesztése még egyszerűbbé válik. A gúla és egyenes áthatási pontja megszerkesztésénél segédsík gyanánt nemcsak vetítősíkot alkalmazhatunk, hanem olyan síkot is, amely:

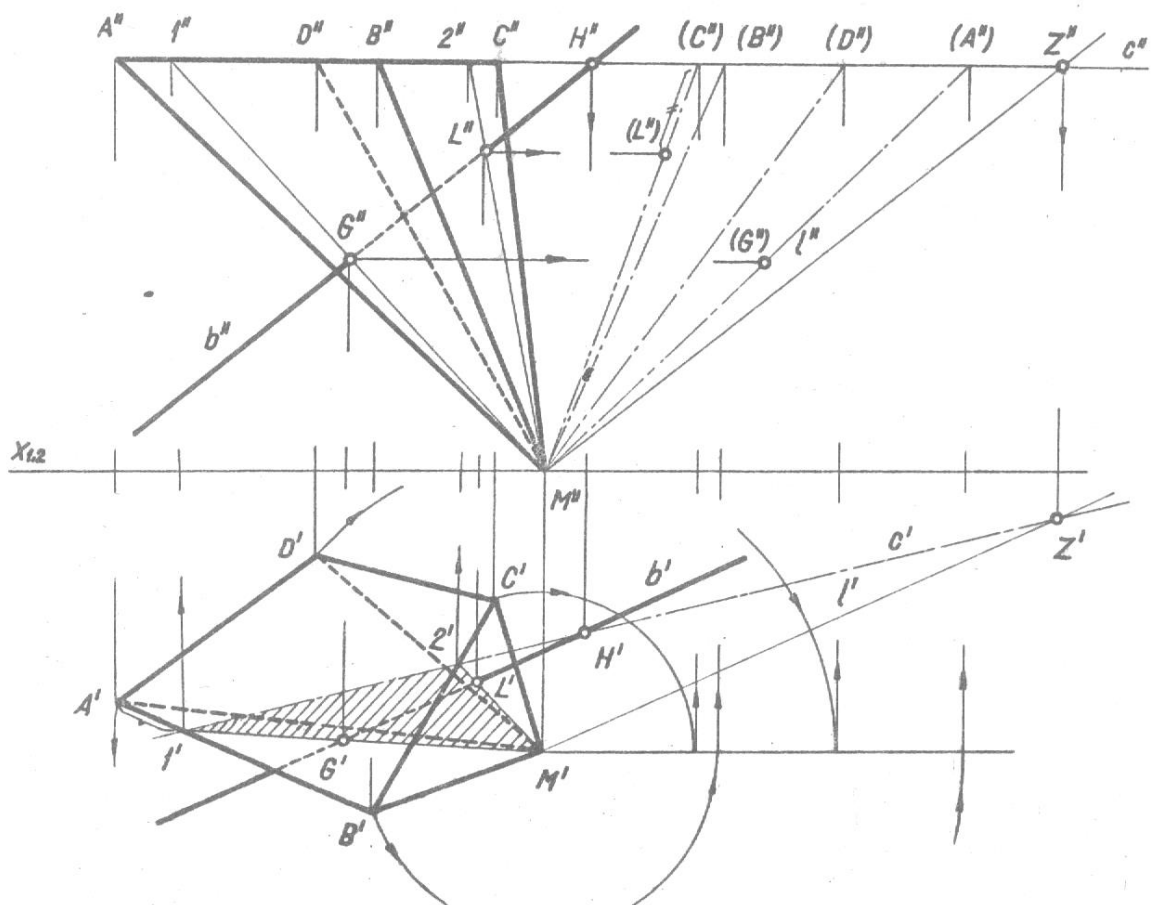
- tartalmazza az adott egyenest és áthalad a gúla M csúcspontján. Ez esetben a segédek a gúlát háromszögben, a gúlafelületet pedig alkotókban metszi (12.5.ábra).
- Ha a segédsík csak az adott egyenest tartalmazza és nem halad át a gúla M csúcán, akkor a gúlát oly sokszögben metszi, amelynek annyi csúcsa van, ahány oldalélt és annyi oldala van, ahány lapot metsz át.

Ezt a szerkesztési módot dőféspont meghatározására ritkán alkalmazzuk, mert túl hosszadalmas. Viszont egyes esetekben csak ez vezethet a megoldáshoz. Ezek az esetek az általános helyzetű dőlt-és feszített síkokkal való síkmetszés képeinek meghatározása.

Ha a test alaplapja az egyik képsíkban fekszik, vagy a gúla sokoldalú, vagy több, egymással paralel helyzetű egyenesnek kell a gúlával való dőféspontjait megszerkesztenünk, akkor célszerűbb a vetítősík helyett a gúla csúcán átmenő segédsík alkalmazása, - mert kevesebb szerkesztővonal felhasználásával jutunk el a kívánt eredményhez.

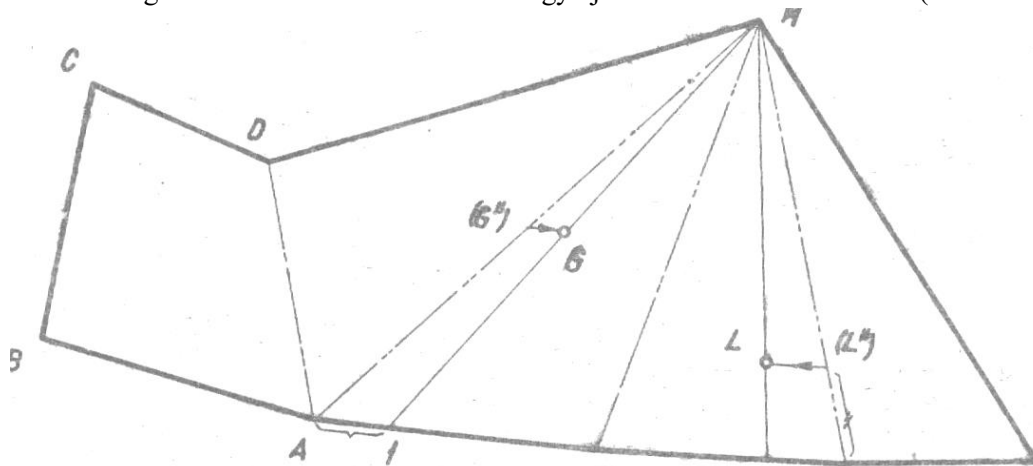
Szerkesszük meg csúcásával K_1 -ben álló, K_1 -gyel paralel négyszög alapú ferde gúla és b egyenes dőféspontjait, valamint a gúla kiterítését a dőféspontok kijelölésével (11.8. ábra).

Az M csúcson átmenő segédsíkot b és 1 egyenesek határozzák meg, Az 1 segédegyenest b -vel párhuzamosan vettük fel. (Tehát $1''$ párhuzamos b'' -vel és M'' -n megy keresztül, az $2'$ pedig M' -ön áthaladva b' -vel párhuzamos.) Ezeknek az egyeneseknek a gúla alapsíkjával való metszéspontjait: H és Z (H'' , H' ; és Z'' , Z')-t összekötő egyenes: c (c'' és c') szolgáltatja a segédsíknak és az alaplap síkjának metszésvonalát, mely az alapnégyszöget 1 és 2 pontokban, a segédsík a gúla felületét $1 M$ és $2 M$ alkotókban metszi. Ahol az alkotók a b egyenest metszik, kapjuk a két dőféspontot: G -t és L -et.



11.8.ábra Ferde gúla dőfése [4]

A gúla hálójának kiterítéséhez az oldalélek valódi nagyságának rotációval való meghatározása szükséges. Későbbi segédletekben ezeket részletesen tárgyaljuk a metszési feladatoknál (11.9.ábra).



11.9.ábra. Ferde gúla palástkiterítése [4]

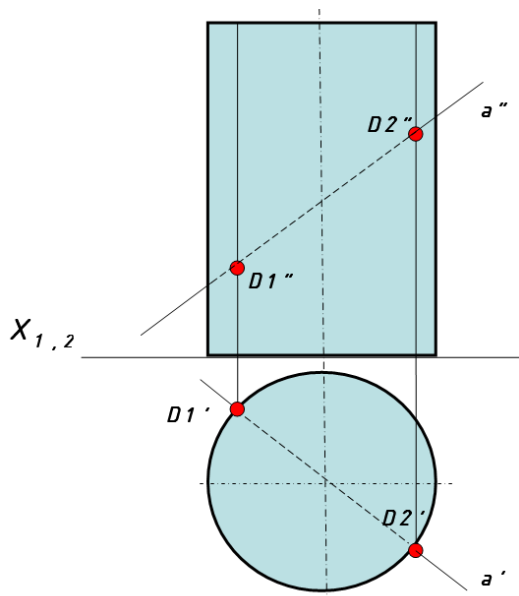
11.2. Forgástestek dőfése

11.2.1. Henger dőfése

Bármely görbe felület és egyenes áthatási pontjait úgy határozzuk meg, hogy az egyenesen egy tetszőlegesen felvett segédsíknak megszerkesztjük a felülettel képzett metszetgörbét, s e metszetgörbe és az egyenes közös pontjai adják a keresett áthatási pontot.

Henger esetében az eljárás megegyezik a hasábéval, csak élek helyett alkotók elnevezést használunk. Célszerű tehát a henger alkotóival párhuzamos segédsíkot felvenni, mert ez a hengert alkotókban metszi és ennek könnyű megszerkeszteni a képeit.

Adott a K_1 -en álló egyenes körhenger két képével. A hengert az a egyenessel dőfjük (11.10.ábra). Határozzuk meg a K_1 -es és K_2 -es képsíkon a dőféspontokat, majd döntsük el a láthatóságot.



11.10.ábra Egyenes henger dőfése [2]

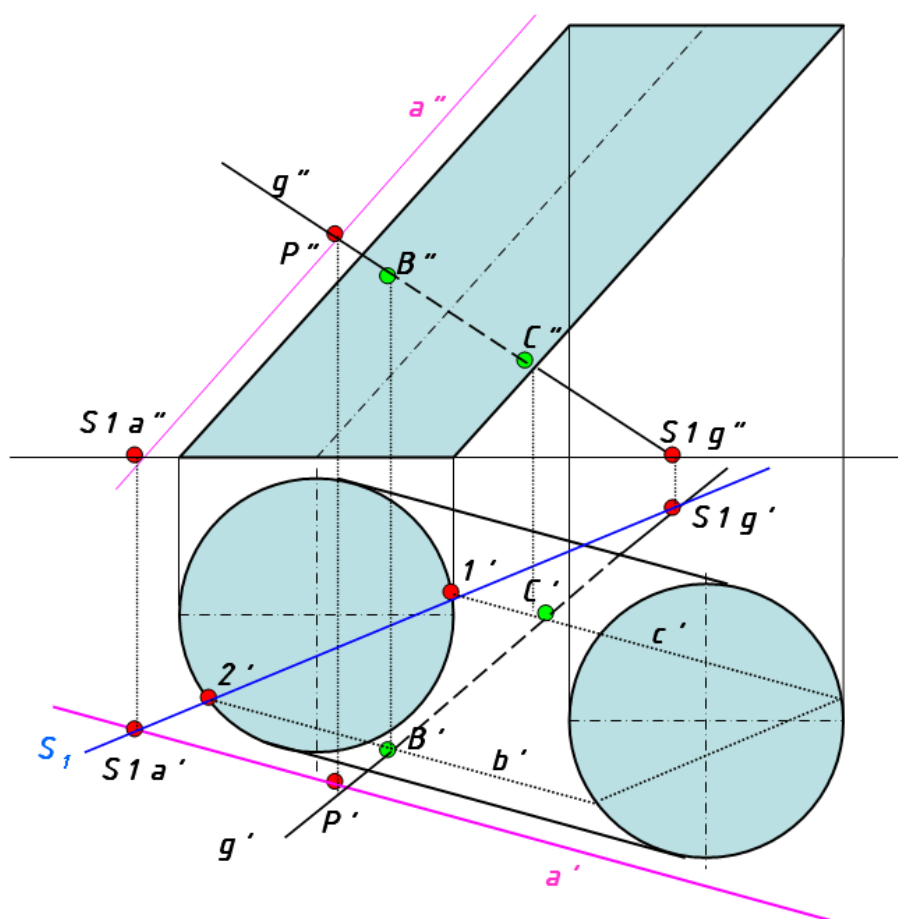
Mivel a vizsgált test egyenes körhenger, nagyon egyszerű a dolgunk. Az első képen megfigyelhető, hogy a henger valódi keresztmetszetét látjuk. Az egyenes első képére (ahol a keresztmetszet megtalálható) első vetítésíkot illesztünk. A segédsík által létrehozott síkmetszet az első képen élében látható. A második képen pedig meg kell határozni a hiányzó síkmetszet vetületét. Az első képen a keresztmetszeten rögtön láthatjuk az a' által a henger palásfelületén létrehozott dőféspontokat ($D1', D2'$), rögtön el lehet ezeket nevezni. Ezután a kapott dőféspontokat a második képre fel kell merőlegesen vetíteni. A merőleges vetítők rögtön kimetszik az a'' -ön a dőféspontok második képeit ($D1'', D2''$) és megjelenik a metszősík által létrehozott síkmetszet is. Ezután már csak a láthatóságot kell eldönteni.

Itt is érdemes a fedőpontpárok módszerét, vagy a vizuális módszert alkalmazni a láthatóság eldöntésében.

Szerkesszük meg két képével adott K_1 -en álló ferde körhenger és g (g', g'') egyenes dőféspontjait (11.11.ábra).

A segédsík meghatározása céljából a g egyenesen felvesszünk egy tetszőleges P pontot, majd e ponton át, az alkotókkal párhuzamos a egyenest képeivel. Megszerkesztjük a metsző egyenesek s_1 nyomvonalát. E nyomvonal és az alapkör első képének metszéspontjain át megrajzolt b' és c' alkotók g' -n kimetszik a keresett B és C dőféspontok első képeit. A második képek vetítéssel szerkeszthetők.

A láthatóságot a tanult módszerek valamelyikével döntjük el. Fontos azt megjegyezni, ha a segédsík s_1 nyomvonala nem metszi a henger alapkörét, akkor a g egyenes sem metszi (döfi) a hengert.



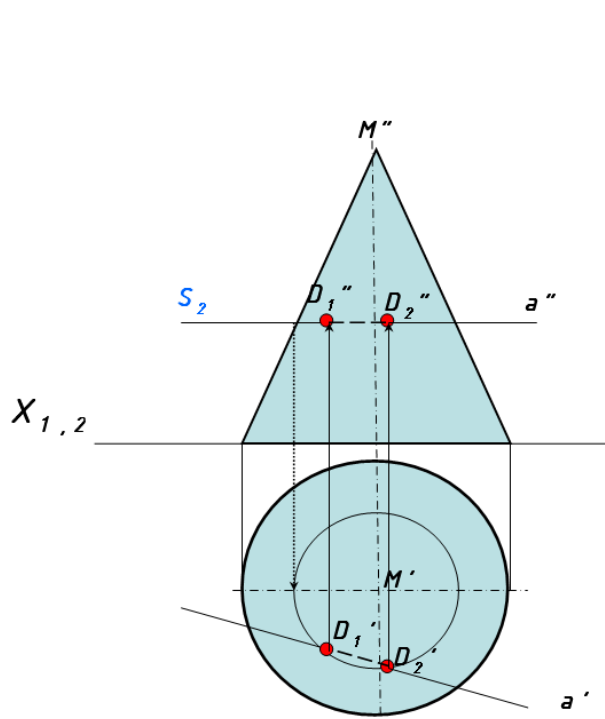
11.11.ábra Ferde henger dőfése [2]

11.2.2. Kúp dőfése

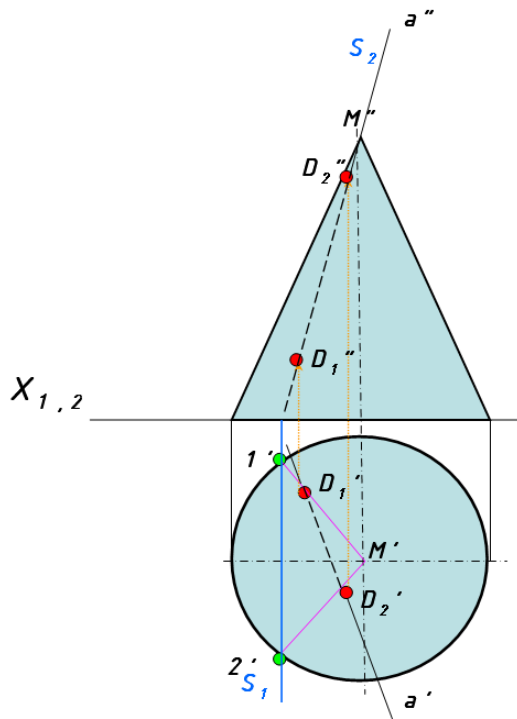
A hasábnál és gúlánál megismert dőféspontszerkesztési eljárások kúpnál is alkalmazhatók.

Vetítősíkot olyankor alkalmazunk, ha az egyenesen olyan vetítősík fektethető rá, amely a kúpot körben, vagy háromszögben metszi. Pl. a következő esetekben (11.12.-, 11.13.-, 11.14. ábrák):

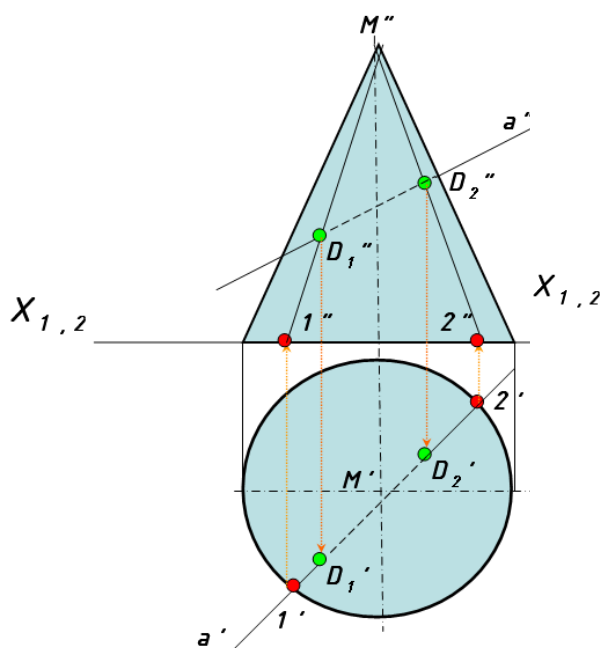
Ha az egyenesnek nincs ilyen helyzete, akkor olyan síkot fektetünk rá, amely a kúp csúcsán is átmegy és a palástot alkotókban metszi. Ez az eljárás megegyezik a 11.15. ábra esetében is.



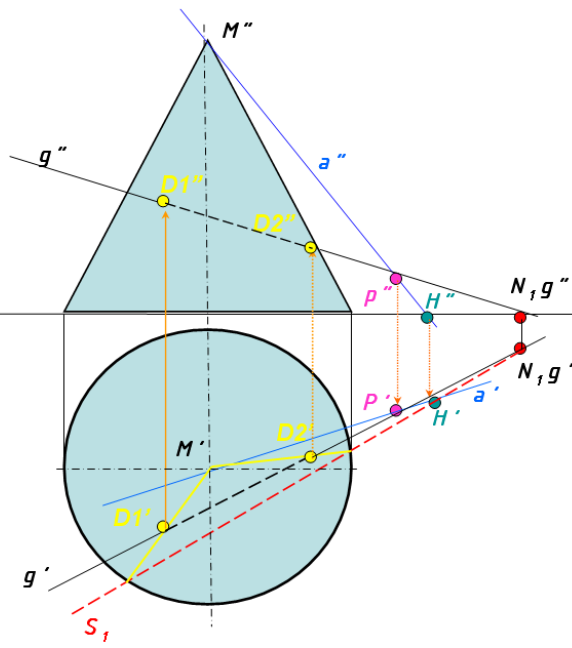
11.12. ábra [2]



11.13. ábra [2]

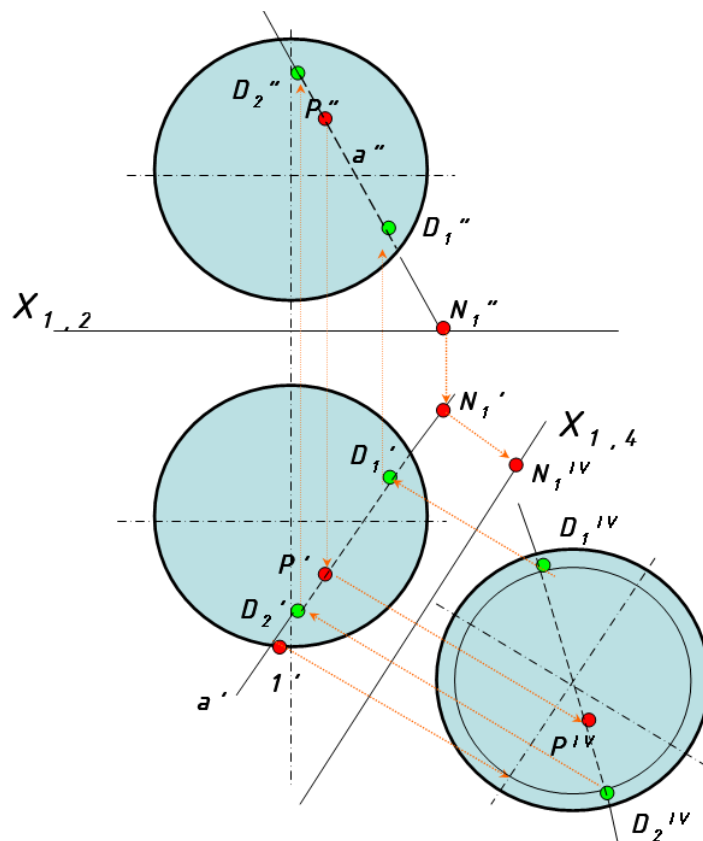


11.14. ábra [2]



11.15. ábra [2]

11.2.3. Gömb dőfése



11.16.ábra Gömb dőfése [2]

A gömb és egyenes dőféspontja az a két pont, amelyben az egyenesen átfektetett segédsíkkal kimetszett gömbi kör az egyenest metszi. Pl, gömb és általános helyzetű a egyenes dőféspontjának szerkesztése (11.16.ábra).

Az a egyenesre illesztett első vetítősíknak a gömbbel való körmetszetét a vetítősíkkal párhuzamos új K_4 képsíkon rajzoljuk meg. A kör, valamint az a egyenes negyedik képe, a^{IV} a keresett dőféspontok negyedik képeiben, A^{IV} -ben és B^{IV} -ben metszik egymást. E pontok első és második képeit visszatranszformálással állapítottuk meg. Az egyenest a láthatóság figyelembevételével ábrázoltuk, fedőpontpár, vagy a vizuális módszerrel.

12. TESTEK SÍKMETSZÉSE ÉS PALÁSTKITERÍTÉSE

12.1. Síklapú testek síkmetszése

A műszaki életben nem elég a testekről csak nézeteket, vetületeket előállítani, amelyek az ábrázolt testeknek csak a külsejét mutatják, hanem sokszor szükséges az üreges test belső alak sajátosságok ismerete is. E célt szolgálja a metszetek készítése. A metszeteket úgy készítjük, hogy a testet síkkal elmetsszük és a sík előtt, vagy fölött lévő anyagot eltávolítva és ami megmarad, azt rajzoljuk meg.

A metszetet aszerint szoktuk megjelölni, ahogy a test fő irányaira állnak. Így megkülönböztetünk: *kereszt*, vagy *normálmetszet*, *hosszmetszetet* és *ferde* metszetet. Keresztmetszetenél a metszősík merőleges az oldalélekre, ugyanazon hasáb keresztmetszetei egybevágóak. Az egyenes állású hasáb keresztmetszete egybevágó az asztallappal.

- *Hosszmetszetenél* a metszősík a hasáb oldaléleivel párhuzamos, ez esetben a metszési idom paralelogramma. Egyenes hasábnál téglalap.
- *Ferdemetszetenél* a metszősík az előbbi kettőtől eltérő. Ilyen esetben általában annyi oldalú sokszöget kapunk, ahány oldalú a hasáb. Lehet aztán egyszerre többféle metszetet is készíteni. Tulajdonképpen minden metszéssel új testet, tárgyat képezünk.

Egy ilyen szerkesztés magába foglalja:

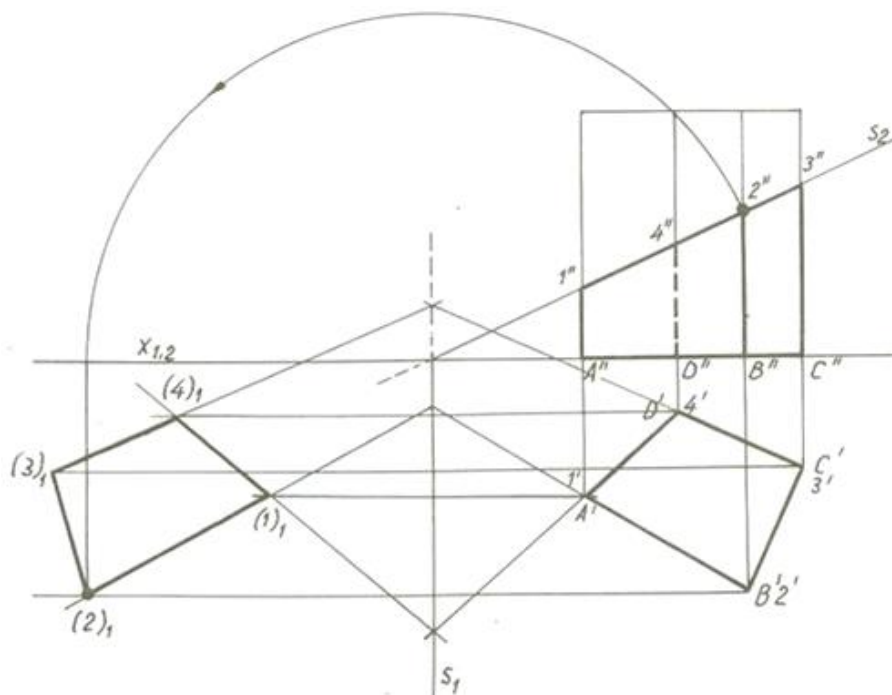
- a test ábrázolását,
- a metszősík jelölését,
- a metszésből származó felület valódi nagyságának megszerkesztését és
- az eredeti és a síkmetszésből származó forma palástjának kiterítését.

A síkmetszéseket, az egyszerűbb érthetőség kedvéért, második vetítésíkkal végezzük, aminek előlnézete egyenes.

12.1.1. Hasáb síkmetszése és palástkiterítése

A hasáb síkmetszetét él, vagy lapmódszerrel határozzuk meg. Az él módszerénél a metszési idom csúcspontjait a hasáb oldaléleinek, mint egy-egy egyenesnek a síkkal alkotott dőléspontjai szolgáltatják. A lapmódszerénél a hasáb lapjainak a metszősíkkal való metszésvonalai szolgáltatják a metszési idom oldalait. A metszetek képeinek megrajzolása akkor a legegyszerűbb, ha a metsző sík vetítésíki.

Adott a *K1*-en álló általános négyszög alapú egyenes hasáb két képe (12.1.ábra), valamint a hasábot metsző második vetítésíki két nyomvonala, S_1 - és S_2 . Rajzoljuk meg a hasáb megváltozott képét. A hasáb lemetezett részét, eltávolítva képzeljük el. Ezt az eltávolított részt vékony vonallal tüntetjük fel. Szerkesszük meg továbbá a metszési idom valódi nagyságát és a csonkahasáb kiterített palástját.



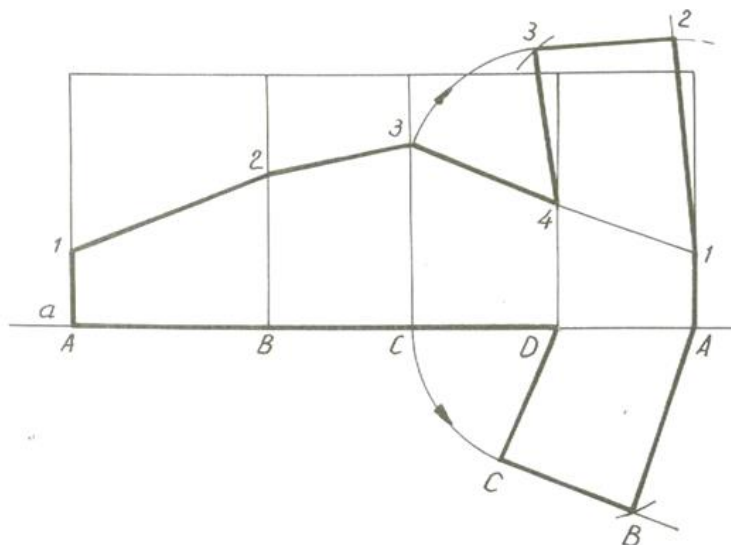
12.1.ábra Általános négyszög alapú egyenes hasáb síkmetszése [2]

A metszősík a hasáb összes oldalélét elmetshi, tehát a metszetidom négyszög. Mivel a metszősík második vetítősík, a hasáb oldaléleinek a metszősíkkal való dőléspontjainak második képeit közvetlenül S_2 -n nyerjük. Tehát a metszetidom második képe S_2 -be eső egyenesdarab. Ennek első képe egybeesik a hasáb első képével, mert az oldalélek K_1 -re merőlegesek. A metszetidom a tanult módszerek egyikével, pl.: S_1 körül K_1 -be forgatással, majd affinitással szerkesztettük meg.

Test hálóján értjük a testet határoló felületnek egy síkba való kiterítését.

A háló elkészítéséhez szükségünk van az oldalélek, oldallapok, továbbá az alap és a fedőlap valódi nagyságára. Ábránkon az ide vonatkozó adatokat közvetlenül kapjuk.

Ha az el nem metszet egyenes hasábot terítjük ki, akkor az oldallapok kifejtése együttesen egy téglalapot adna, amelynek hossza az alap kerülete, magassága pedig a hasáb magassága. Az alap és fedőlap valódi nagyságában látható.



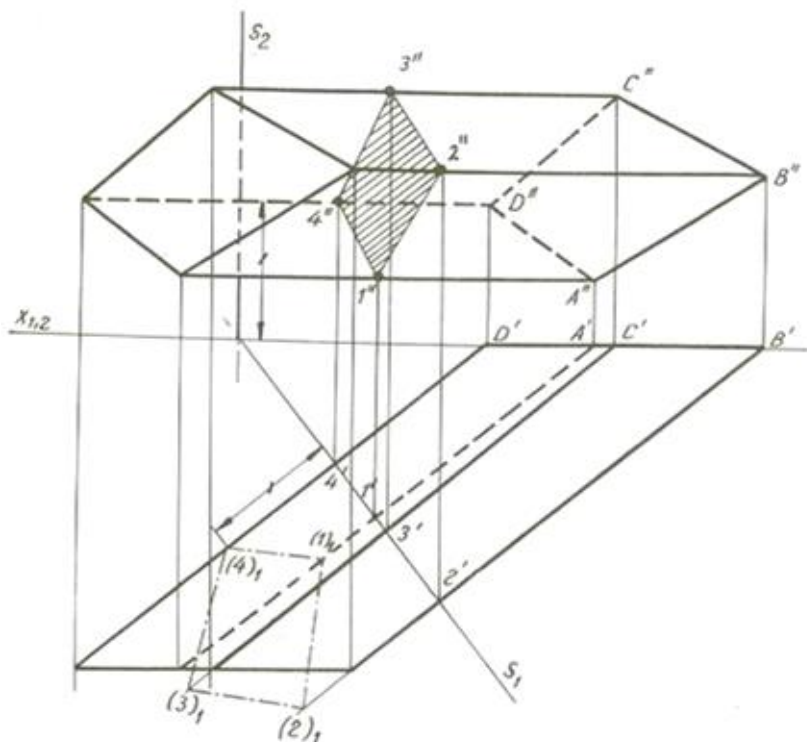
12.2.ábra A hasáb kiterített palástja [2]

A hasábot ferdén metszettük, ezért az oldallapok mindegyike trapéz lesz. Vágjuk fel a hasábot az $A,1$ oldalél mentén. Először az alapél kifejtését határozzuk meg, mely egy egyenesbe esik (mivel a hasáb egyenes). E célból az a vízszintes egyenes az alap tetszőleges pontjából kezdve felmérjük az alap oldalait,

majd a kapott A, B, C, D, A pontokban az egyenesre merőlegeseket rajzolunk, s ezekre felmérjük az elmetezett oldalélek valódi nagyságát. Ezeket a második képen kapjuk, mivel minden oldalél a K_2 -vel párhuzamos, s az ilyen módon nyert végpontokat összekötve a metszési idomnak megfelelően tört vonalakat kapunk.

A továbbiakban az alapél kifejtéséhez (D, A oldalhoz) átmásoljuk a hasáb alapját, a felső tört vonal 1,4-es részéhez pedig a metszési idom valódi nagyságát kell átmásolni.

Adott a K_2 -n álló általános négyszög alapú ferde hasáb, melynek oldalélei K_1 -el párhuzamosak. Szerkesszük meg a ferde hasáb kiterített palástját (12.3.ábra).

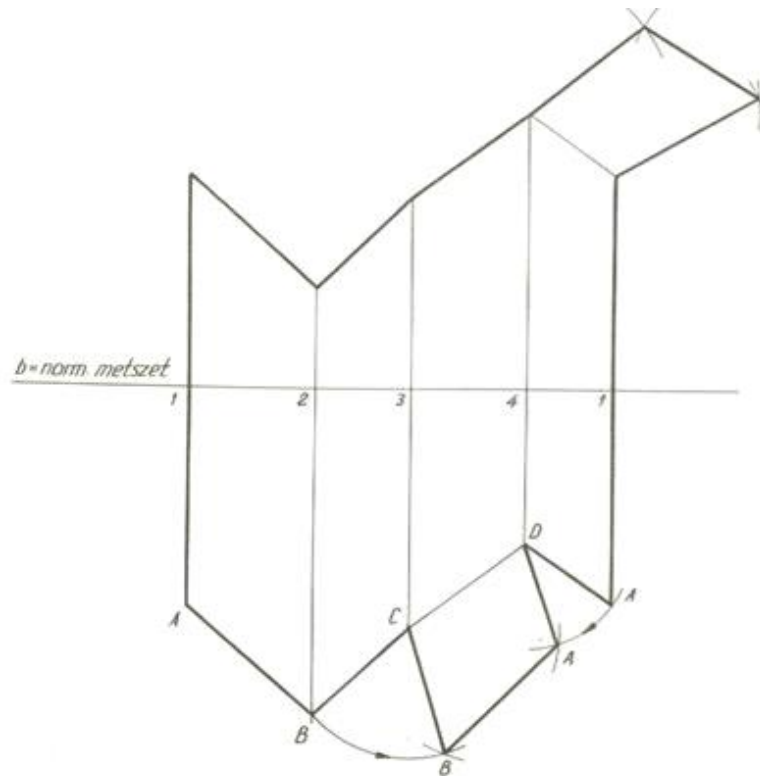


12.3.ábra Ferde hasáb síkmetszése [2]

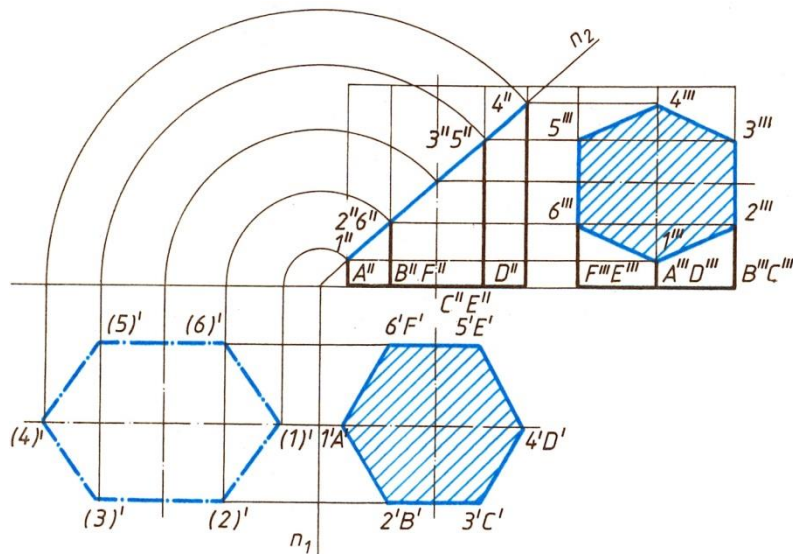
A hasáb ferde, tehát mind az alapél, mind a fedőél kiterítése tört vonal lesz, melynek megszerkesztéséhez előbb a ferde hasáb normálmetszetét kell elkészítenünk. Ez úgy történik, hogy az oldaléleket merőlegesen elmetsszük egy első vetítősíkkal. E normális metszősík által elmetezett idom első képe $1' 2' 3' 4'$, az S_1 -be eső egyenes darab. Második képét vetítéssel nyerjük. A háló megszerkesztéséhez azonban először a normálmetszet valódi nagysága szükséges. Ezt ábránkon S_1 körül K_1 -be forgatással határozzuk meg.

A normálmetszet kifejtése egy egyenesbe esik. Mérjük fel tehát a vízszintesen húzott b egyenesre a normálmetszet oldalait, s az így kapott $1, 2, 3, 4, 1$ pontokban emelt merőlegesekre mérjük fel az alap és fedőlap csúcsainak a normálmetszet csúcsaitól mért távolságait, melyek az első képből valódi nagyságban közvetlenül mérhetők, miután az oldalélek K_1 -el párhuzamosak. Így az oldallapokat valódi alakban és nagyságban terítettük ki (12.4.ábra). Az oldallapok kiterítéséhez megrajzoljuk még a hasáb alap és fedőlapját is.

A 12.5.ábrán látjuk a hatoldalú hasáb síkmetszését második vetítősíkkal. A metszősík ábrázolását nyomvonalaival végezzük. A láthatósági kihúzás során a hasábnak csak a metszősík alatti részeit vesszük figyelembe. A metszősík és a hasáb oldaléléinek metszéspontjait az előlnézetben, a nyomvonalnak a hasáb oldalélével alkotott metszéspontjai meghatározzák. A metszés jellegéből adódik, hogy a metszeti idom nem lesz azonos nagyságú az alapsíkkal, a felülnézete mégis pontosan megegyezik az alaplap vetületével. A hasáb talppontjait betűjelzéssel, az oldalélek metszéspontjait számozással látjuk el.



12.4.ábra Ferde hasáb palástkiterítése [2]



12.5.ábra Hatoldalú hasáb síkmetszése, a síkmetszet valódi nagyságának meghatározása leforgatással [8]

A metszősíkot első nyomvonalra mentén forgatjuk az első képsíkra, majd ábrázoljuk (12.5.ábra). Leforgatáskor az azonos pontok vetítésének metszései meghatározzák a pont leforgatott képét. Megfelelő sorrend szerinti összekötésük a metszeti idom valódi nagyságát adja.

Transzformáláskor (12.6.ábra és 12.7.ábra) a metszősíkot második nyomvonalra mentén forgatjuk az előlnézet képsíkjához. A szemléltető képen látható, hogy a hasáb oldalélén keletkező metszéspontok a metszősík nyomvonalára merőleges köríven fordulnak el.

Minden metszéspontnál, a körív sugara a pontnak, a metszősík második nyomvonalától mért merőleges távolságával egyenlő. Ez a távolság minden pontnál megegyezik a pontnak az $x_{1,2}$ tengelytől mért távolságával is.

Egy pontnak az $x_{1,2}$ tengelytől mért távolsága az első képsíkon, megegyezik a pontnak az $x_{2,4}$ tengelytől mért távolságával a negyedik képsíkon.

79

A hasáb alkotóival nem párhuzamos sík a hasáb minden élét és alkotóját metszi. A síkmetszet síkidom, melynek csúcspontjai a sík és az oldalélek dőléspontjai, oldalai a sík és oldallapok metszésvonalai.

A síkmetszés szempontjából *négyféle esetet* különböztetünk meg:

1. a hasáb általános helyzetben van és a sík vetítősík,
2. az egyenes hasáb egyszerű helyzetben van és a sík általános helyzetű,
3. a ferde hasáb egyszerű helyzetben van és a sík általános helyzetű,
4. a hasáb is, a sík is általános helyzetben van.

12.1.2. Gúla síkmetszése és palástkiterítése

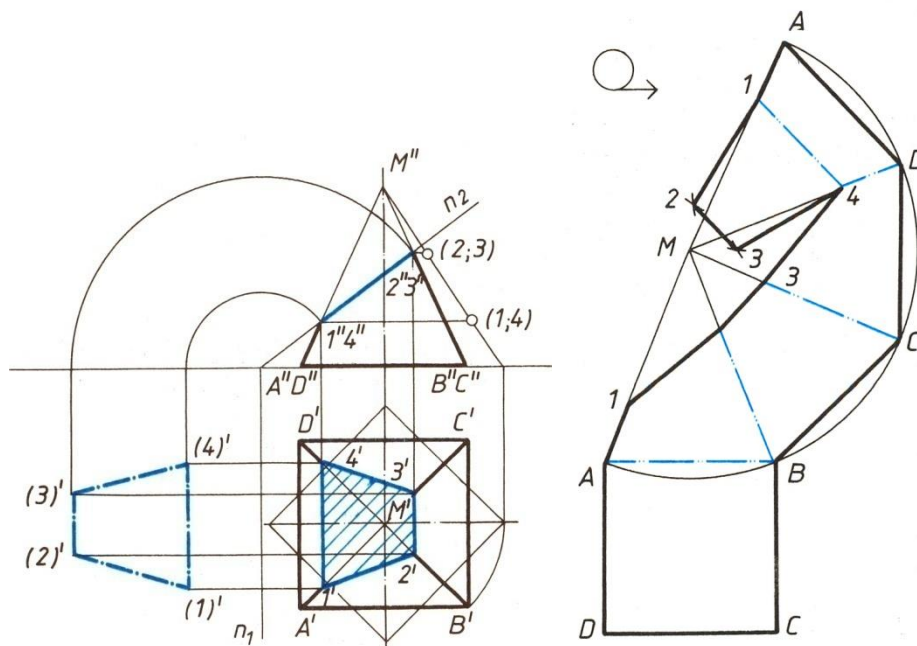
Ha a metszősík áthalad a gúla csúcsán, akkor pont, vagy oldalél, vagy háromszög a metsszék. Ha a metszősík nem halad át a gúla csúcsán, akkor azt sokszögben metszi, melynek annyi csúcsa van, ahány oldalélt és annyi oldala van, ahány oldallapot metsz át a sík.

A metszetidom szerkesztése történhet "élmódszerrel", vagy "lapmódszerrel".

Élmódszerrel akkor ajánlatos dolgozni, ha a metsző sík vetítősík. A lapmódszer alkalmazása magában véve nehézkes, de az élmódszerrel egyesítve sokszor célszerűen alkalmazható. Ha a metsző sík általános helyzetű, akkor gyakran alkalmazzuk a transzformáció módszerét, azaz a metsző síkot vetítő síkká alakítjuk.

A négyzetes gúla síkmetszését második vetítősíkkal és palástkiterítését a 12.8. ábrán látjuk. Rajzoljuk meg a négyzetes gúlát és a metszősík nyomvonalait. Az előnézeten láthatók a gúla oldaléleinek a metszősík második nyomvonalával alkotott metszéspontjai.

A metszéspontokat levetítjük a gúla oldaléleinek felülnézeti megfelelőire, megfelelő sorrendben egyenessel összekötve a metszeti idom felülnézetét kapjuk, ami nem valódi nagyságú.



12.8.ábra Négyzetes alapú egyenes gúla síkmetszése és palástkiterítése [8]

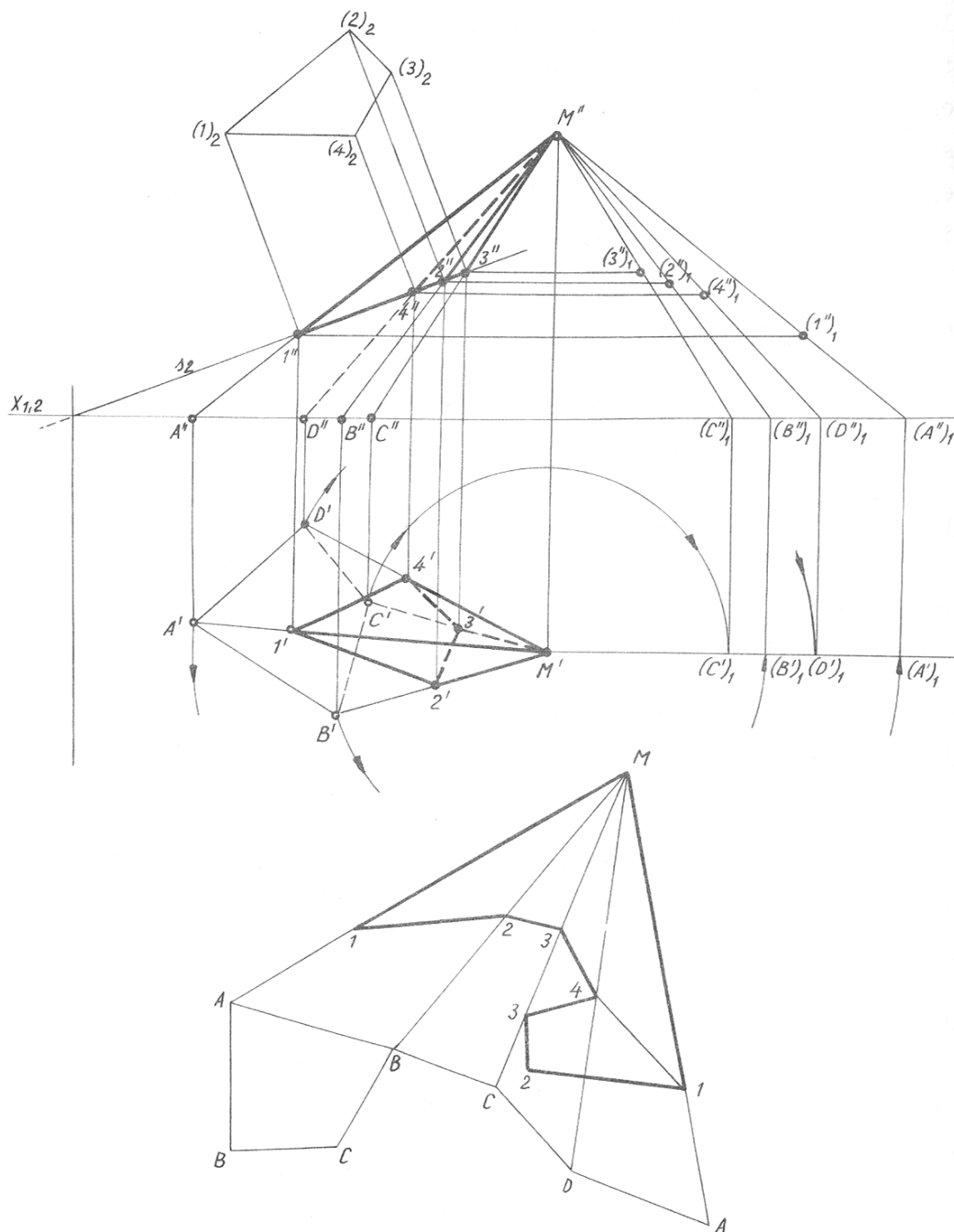
A metszeti idom valódi nagyságát akár leforgatással, akár transzformálással megszerkeszthetjük.

A palástkiterítéshez ismernünk kell a gúla oldalélének valódi hosszát. Ezt rotációval határozhatjuk meg, ami azt jelenti, hogy az adott gúlaélt a K_2 -vel párhuzamossá tesszük és ezáltal a K_2 -n a gúla élének valódi hossza lesz látható. Megjegyzendő, hogy ebben az esetben a gúla 4 éle azonos mert szabályos négyzet alapú egyenes gúláról van szó. Ha a gúla általános négyzet alapú lenne, akkor minden élt rotálni kellene ahhoz, hogy a palástkiterítést meg tudjuk szerkeszteni.

A palástkiterítéshez a gúla oldalélének valódi hosszával rajzoljunk körívet, erre a négyzet élhosszát négyszer mérjük fel, a jelölt csúcsponttal összekötve rajzoljuk ki a gúla kapcsolódó oldallapjait.

A csonkolt gúla palástjához az oldalél valódi hosszára átvetített $(1, 4)$, $(2, 3)$ távolságokat mérjük fel. A négyzetes gúla alaplapját és a metszeti idom valódi nagyságát másoljuk át a kiterített palástról. Kihúzáskor a hajlítási éleket szintén vékony kétpont-vonallal jelöljük.

Adott egy K_1 -en álló szabálytalan négyszög alapú ferde gúla első és második képe (12.9.). A metszősík második vetítő sík. Rajzoljuk meg az elmetsett gúla új képeit és a csonkított gúla hálóját.

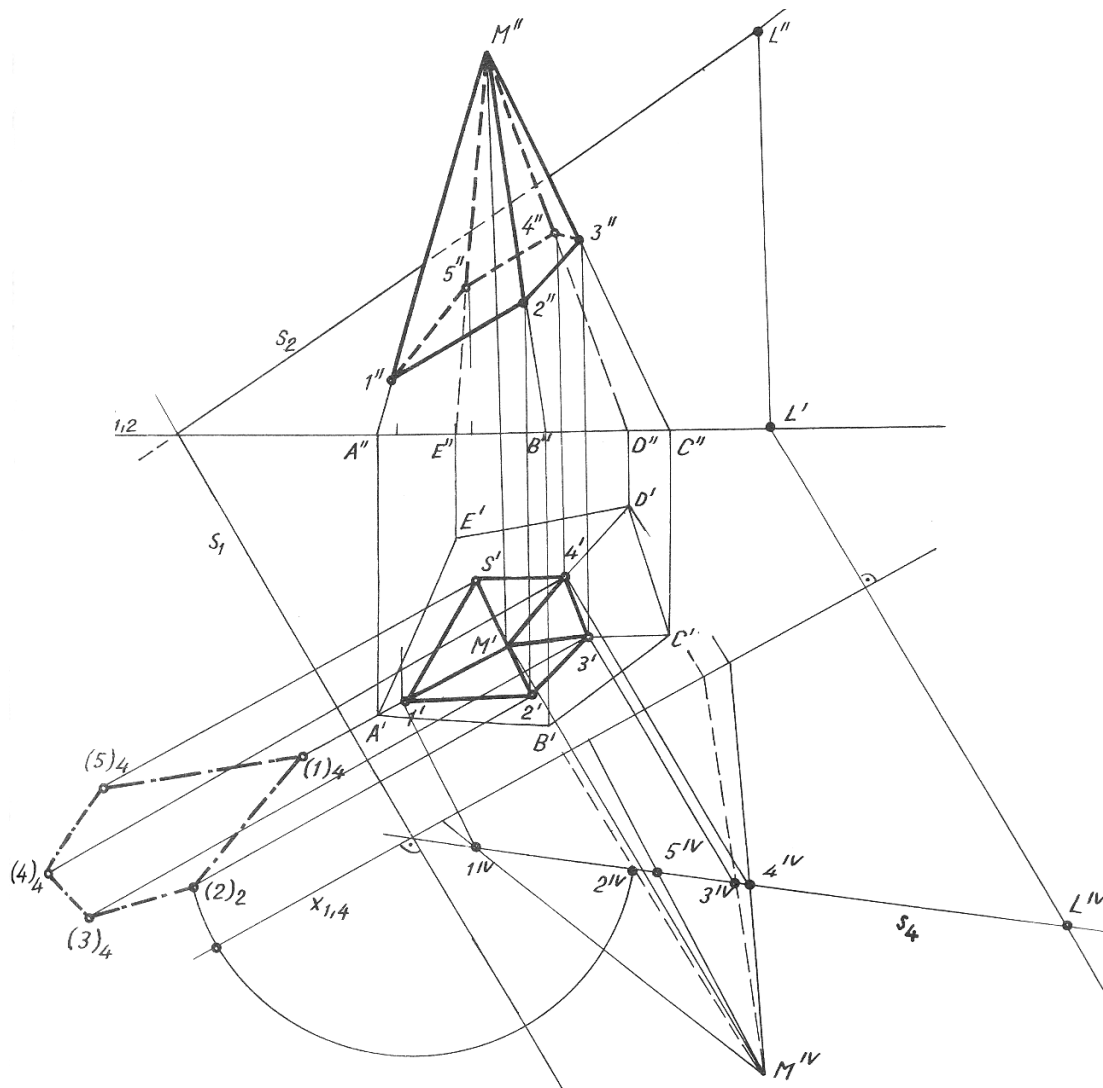


12.9.ábra Általános négyszög alapú ferde gúla síkmetszése és palástkiterítése [4]

A metszeti idom második képét közvetlenül, első képét pedig vetítéssel nyerjük. A háló megrajzolásához szükségünk van a gúla oldaléleinek valódi nagyságára. Mivel az oldalélek egyike sem párhuzamos a képsíkok valamelyikével, ezért minden oldalélnek külön-külön kell megszerkeszteni a valódi hosszát rotációval. A ferde gúla oldallapjai különböző nagyságú háromszögek, s ezeket a háromszögeket kell a kiterítéshez egymás mellé megszerkesztetni. Mivel minden háromszög oldallapnak ismert minden oldalmérete, síkmértanilag kell az egymás mellett fekvő háromszögeket a kitűzött MA oldalél segítségével

megrajzolnunk. A 12.9.ábra világosan mutatja a teljes és az elmetsett gúla hálóját és annak szerkesztési módját.

Adott K_I -en álló szabálytalan ötoldalú gúla két képe, továbbá a dőlt helyzetű metszősík s_1 és s_2 nyomvonala (12.10.ábra). Rajzoljuk meg a gúla megváltozott képeit, ha a metszősík alatti részét eltávolítottuk.



12.10.ábra Általános ötszög alapú gúla síkmetszése dőlt síkkal [4]

Feladatunkat új képsík, K_4 - felvételével oldjuk meg, s ezzel visszavezetjük vetítősíkkal való síkmetszésre. Az új képsík $x_{1,4}$ tengelyét s_1 -re merőlegesen vesszük fel, s megszerkesztjük a gúla negyedik képét, valamint a metszősík s_4 negyedik nyomvonalát. A metszetidom csúcspontjai a negyedik képben közvetlenül s_4 -en adódnak, amelyből az első és második kép vetítéssel nyerhető.

Ábránkon még a síkmetszet valódi nagyságát is megrajzoltuk s_1 körül K_I -be forgatással.

A csonkított gúla hálóját nem készítettük el, de az érdeklődő olvasó az előbbi hálószerkesztés alapján minden nehézség nélkül boldogulhat.

12.2. Forgástestek síkmetszése és palástkiterítése

12.2.1. Henger síkmetszése és palástkiterítése

A forgástest síkmetszése és palástkiterítése magába foglalja:

- a forgástest ábrázolását,
- a metszősík jelölését,
- a metszésből származó felület valódi nagyságának megszerkesztését,
- az eredeti és a síkmetszésből felhasznált forma palástjának kiterítését.

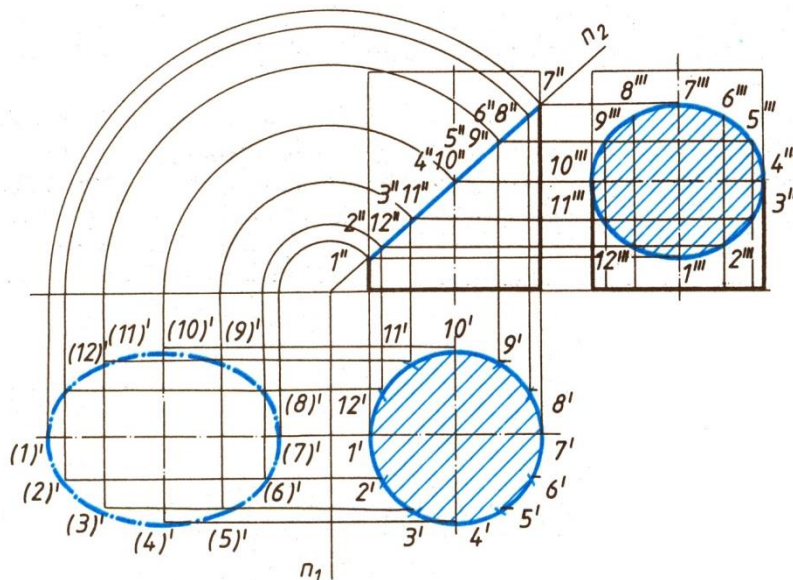
A síkmetszéseket az egyszerűbb értelmezhetőség kedvéért második vetítősíkkal végezzük, aminek előlnézete egyenes. Későbbiekben a dőlt- és feszített síkokkal való síkmetszést is második vagy első vetítősíkkal való síkmetszésre vezetjük vissza. Egy görbe felület síkmetszete általában görbe vonal. A „síkmetszetgörbe” pontjai a felületnek és a felületet metsző síknak közös pontjai. Megkönnyíti a görbe vonal megrajzolását, ha sok pontot, s köztük az ún. "különleges pontokat" is megszerkesztjük.

A henger metszetei:

- a) Alkotókkal párhuzamos sík a hengert alkotókban metszi.
- b) A henger tengelyére merőleges sík metszete kör (normálmetszet).
- c) A henger tengelyét ferden metsző sík a hengert ellipszisben metszi.

A henger síkmetszését második vetítősíkkal a 12.11.ábrán látjuk. A láthatóság szerinti kihúzáskor a hengernek csak a metszősík alatti részeit vesszük figyelembe.

A henger forgástest, felületén nincsenek élek, amelyeket a metszősík elvághatna, megadva ezzel a szerkesztés kiinduló lépését. Ezért a, henger felületén tetszőleges számú, lehetőleg szimmetrikus elhelyezkedésű alkotót jelölünk ki, ezekkel végezzük el a szerkesztést hasonlóan, mint a hasáb esetén. Azok az alkotók melyek a különböző vetületeken a legnagyobb keresztmetszetet adják kontúralkotónak nevezzük.



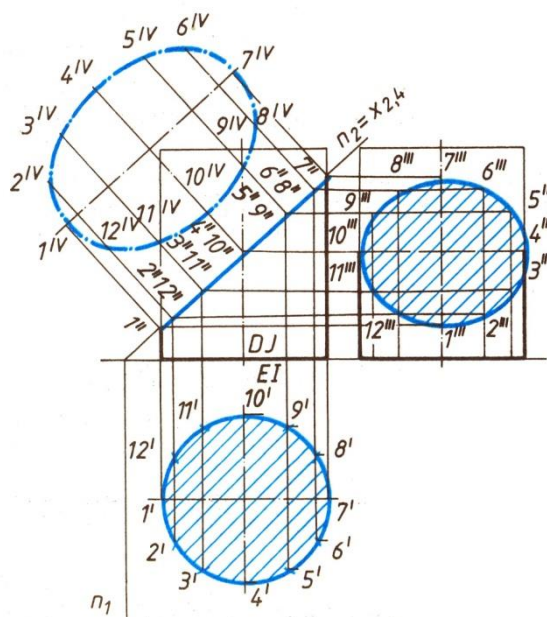
12.11. ábra Henger második vetítősíkkal való síkmetszése valódi síkmetszet meghatározása leforgatással [8]

A 12.11. ábrán a hengert második vetítősíkkal metszettük el. A metszeti idom ellipszis, aminek felülnézete megegyezik az alaplap vetületével.

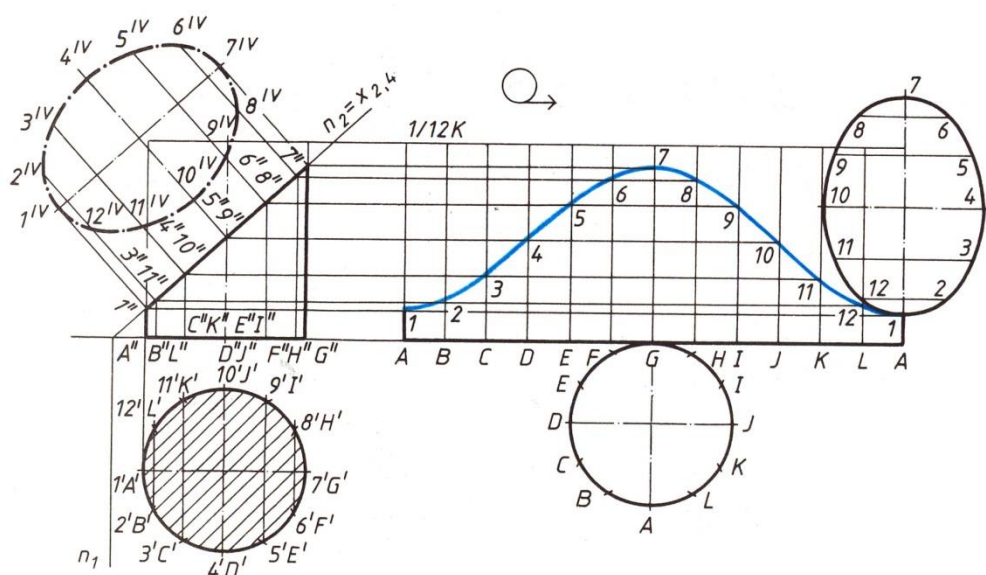
Jelöljük a henger palástján 12 alkotót. Az alkotók előlnézete metszésbe kerül a metszősík második nyomvonalával. A jelölt metszéspontok leforgatásával megszerkeszthető az ellipszis mint a metszeti idom valódi nagysága.

A 12.12. ábra szintén a henger síkmetszését mutatja második vetítősíkkal, de a metszeti idom valódi nagyságának megszerkesztése itt transzformálással készült.

A szerkesztés során megrajzoljuk a hengert, a második vetítősík nyomvonalait. Jelöljük az alkotók második vetületének a metszősík második nyomvonalával alkotott metszéspontjait. Ezeket transzformáljuk a negyedik képsíkra, és görbe vonallal összekötve megkapjuk a metszeti idom valódi nagyságát.



12.12.ábra Henger második vetítősíkkal való síkmetszése valódi síkmetszet meghatározása transzformációval [8]



12.13.ábra Csonka henger palástkiterítése [8]

A 12.13.ábrán a teljes feladat szerepel. Látjuk a síkmetszést, a metszeti idom valódi nagyságának meghatározását transzformálással és a henger palástkiterítését.

A palástkiterítést végezzük a henger alaplapjával azonos magasságban. Vegyük körzőnyílásba a henger kerületének 1/12 részét, és a szerkesztés alapvonalára 12-szer mérjük fel. Rajzoljuk meg a henger alkotóit, zárjuk le az oldalfelületét a henger eredeti testmagasságával.

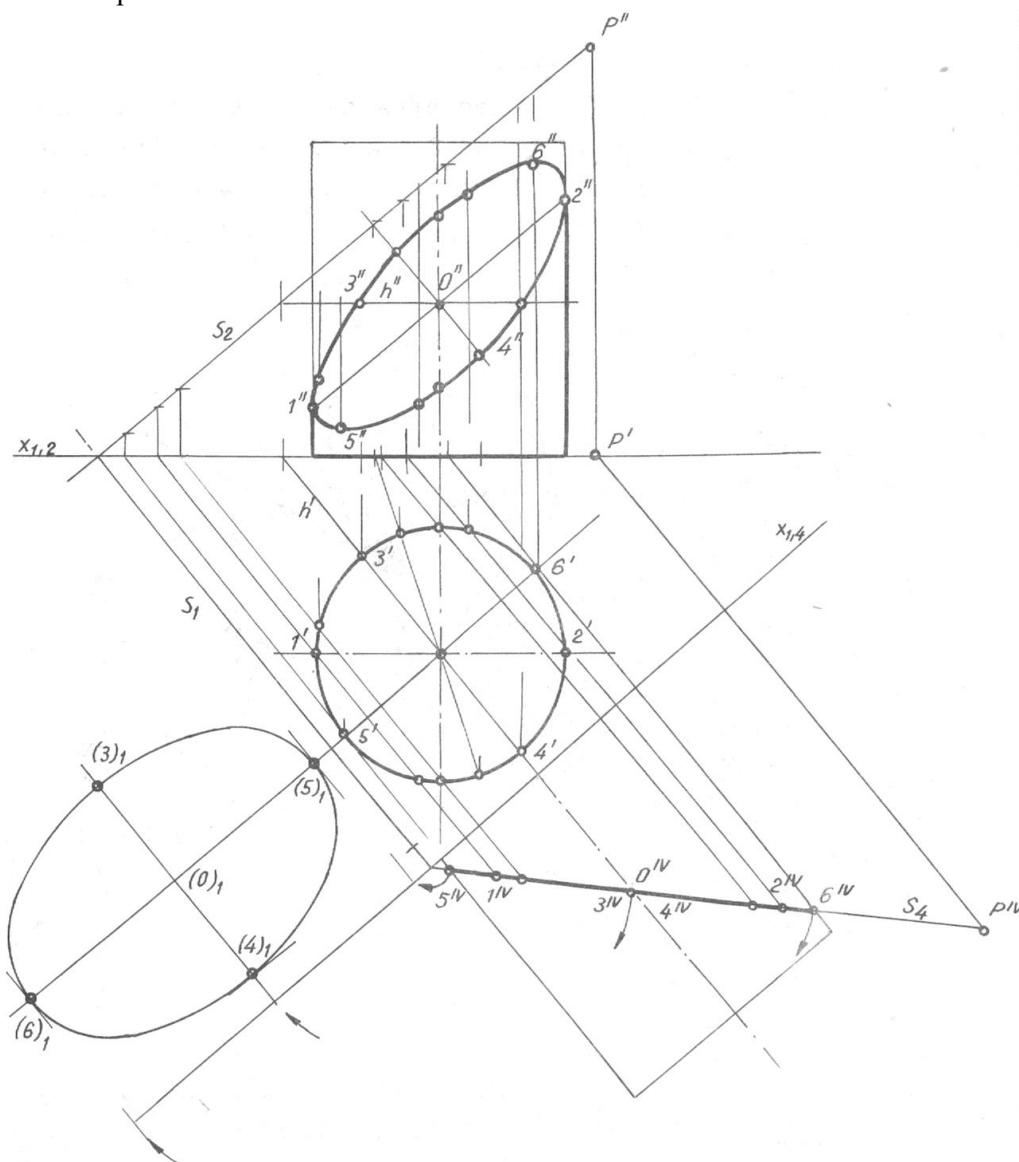
Ezt követően az alaplappal párhuzamosan vetítsük át a megfelelő alkotókra a síkmetszésből származó metszéspontokat.

Az így kapott metszéspontokat görbe vonallal összekötve megkapjuk a henger metszősík alatti részének palástját. A kiszerkesztett palásthöz kapcsolható az alaplap és a metszeti idom valódi nagysága.

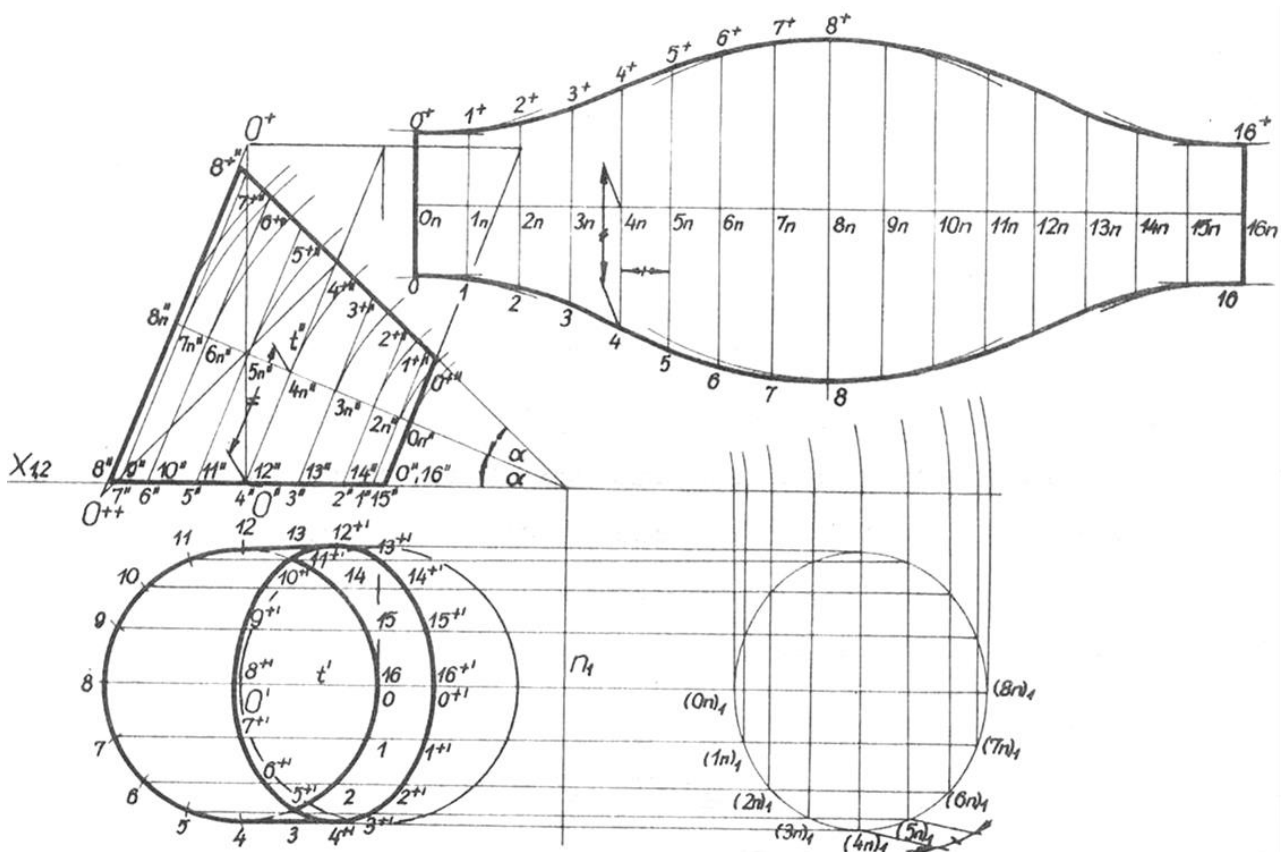
Adott a K_I -en álló egyenes körhenger első és második képe (12.14.ábra). Szerkesszük meg a henger és nyomvonalával adott dőlt sík metszésidomát.

Feladatunkat új képsík felvételével, azaz a dőlt síkot vetítő síkká való transzformálással oldottuk meg. Így a szerkesztés az $x_{1,4}$ rendszerben megegyezik a 12.13.ábrán látható feladat megoldásával. A második képet a vezérkörön (első kép) kitűzött pontok negyedik képeihez tartozó elmaradó rendezők, vagy a pontokon áthaladó fővonalak segítségével határoztuk meg. A palástkiterítés pedig az előzőekben tárgyaltak szerint történik.

A 12.15.ábrán egyértelműen látszik a ferde henger első és második képeinek szerkesztése, síkmetszése, a síkmetszet vetületeinek meghatározása és a csonka palást kiterítése. Így ez magyarázatot nem igényel. A szerkesztés Az előző példákban bemutatottak szerint történik.



12.14.ábra Henger általános helyzetű síkkal való metszése [2]



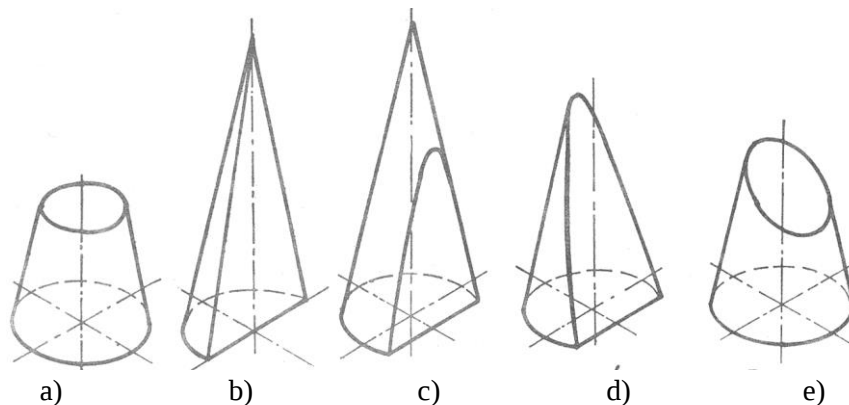
12.15.ábra Ferde henger síkmetszése és palástkiterítése [1]

12.2.2. Kúp síkmetszése

A kúp síkmetszésekor, a metszősík helyzete szerint, különféle szabályos görbékkel határolt síkidomokat nyerünk, amelyeket kúpszeleteknek nevezünk.

A 12.16. ábra a kúp síkmetszéséből származó jellegzetes kúpszeleteket mutatja.

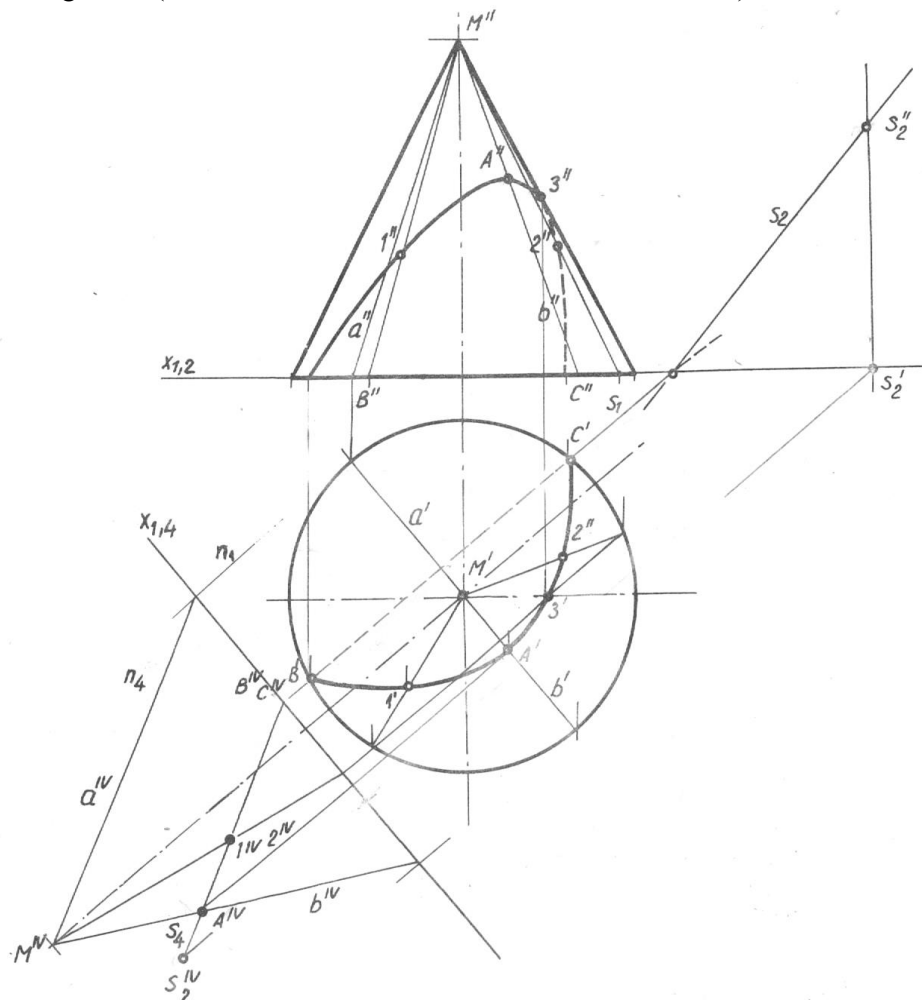
- Ha a kúpot tengelyére merőlegesen szeleteljük, akkor a metszésidom kör (12.16a ábra).
- Az ellipszist már megszerkesztettük, amit úgy származtattunk, hogy a kúpot tengelyéhez viszonyítva ferdén metsztük, és a metszősík a kúp valamennyi alkotóját elvágta (12.16.e ábra).
- Ha a metszősík a kúpnak egy alkotójával párhuzamos, akkor parabola metszetet kapunk (12.16.d ábra).
- Két alkotóval párhuzamos metszősík esetén a metszésidom hiperbola (amit csak közös tengelyű, hegyükkel egymásra illesztett teljes kúp metszéséből kapunk (12.16.c ábra).
- Ha a metszősík a kúp két alkotóján halad keresztül, a metszésidom háromszög (12.16.b ábra).



12.16.ábra Kúp síkmetszetei [10]

Szerkesszük meg a K_I -en álló egyenes körkúp parabolametszetét (12.17.ábra), ha a metszősík feszített helyzetű.

Akkor kapunk parabola metszetet, ha a metsző sík a kúpnak csak egy alkotójával párhuzamos. Ezért a kúp képeinek ábrázolása után felvettük a kúp a alkotóját, az a menti érintősík első nyomvonalát n_1 . A metsző síkot, ezzel az érintősíkkal párhuzamosan választottuk és s_1 -el adtuk meg. A további szerkesztést transzformációval végeztük. (K_4 -re az érintő sík is és a metsző sík is vetítő sík.)



12.17.ábra Kúp metszése feszített síkkal [2]

A 12.18.ábrán adott egy első vetítősugar-tengelyű és egy Σ sík metszőegyeneseivel. Szerkesszük meg a kúp adott Σ síkkal alkotott metszetét. A Σ metszősíkot a kúp alapkörének síkjában fekvő h és a tengelyt metsző v fővonalával adtuk meg. A sík első főegyenésére merőleges, új képsíkot vezetünk be. Ezzel a metszősíkot vetítősíkká transzformálhatjuk.

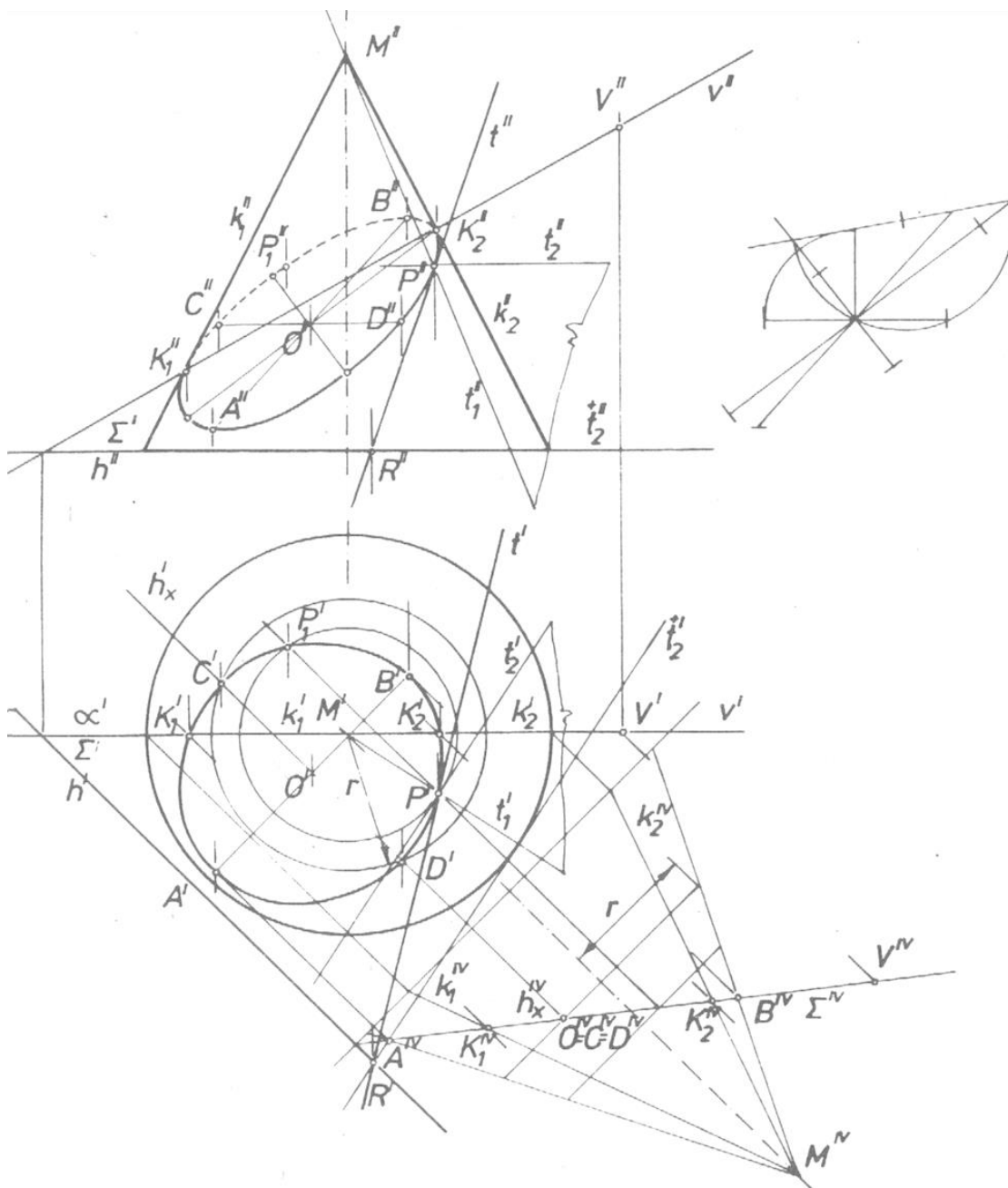
A negyedik képen látjuk, hogy a Σ sík a kúp minden alkotóját metszi, tehát a síkmetszet ellipszis. Negyedik képen a metszősíkkal együtt a benne levő síkmetszetet is élben látjuk. A metszet ellipszis, negyedik képe az $A^{IV} B^{IV}$ szakasz.

Az előzőekben megjegyeztük, hogy a síkmetszet szimmetriatengelyét a metszősíkra merőleges meridiánsík metszi ki.

Negyedik képen világosan látszik, hogy a metszősíkra merőleges meridiánsík éppen a kúp tengelyét tartalmazó negyedik fősíki, amely a kútból a negyedik kontúralkotókat, a metszősíkból pedig az AB egyenest metszi ki. Az AB egyenes kontúralkotókkal való, A és B metszéspontja adja a tengelyvégpontokat. Mivel az AB szakasz a kúp és a metszősík közös szimmetriasíkjában van, ezért e szakasz a metszet szimmetriatengelye. Erre a tengelyre a metszet tükrös. Az AB szakasz, tehát a ellipszis tengelye.

Az AB szakasz első képe rendezőkkel kijelölhető h' -re merőlegesen, tengelyvégpontok első képe a negyedik kontúralkotók első képén adódik.

Az AB szakaszt merőlegesen felező CD egyenes az, ellipszis másik tengelye. Ez a tengely a metszősík első fővonalára esik, azaz negyedik vetítőegyenesre. Így negyedik képe az AB szakasz felezőpontjának O^{IV} képe. A tengely C, D végpontját a 0 ponton áthaladó, a tengelyre merőleges szeletelő síkkal nyerjük. Ezen szeletelő sík a kúpot egy r sugarú paralelkörben metszi, melynek sugarát negyedik képen valódi nagyságban látjuk. A kör síkja első fő sík, így első képen megrajzolhatjuk az r sugarú kört. A szeletelő sík ugyanakkor a metszősíkot egy a 0 ponton áthaladó első fővonalban metszi. A kimetszett kör és fővonal közös pontjai a keresett végpontok.



12.18.ábra Kúp metszése dőlt síkkal [12]

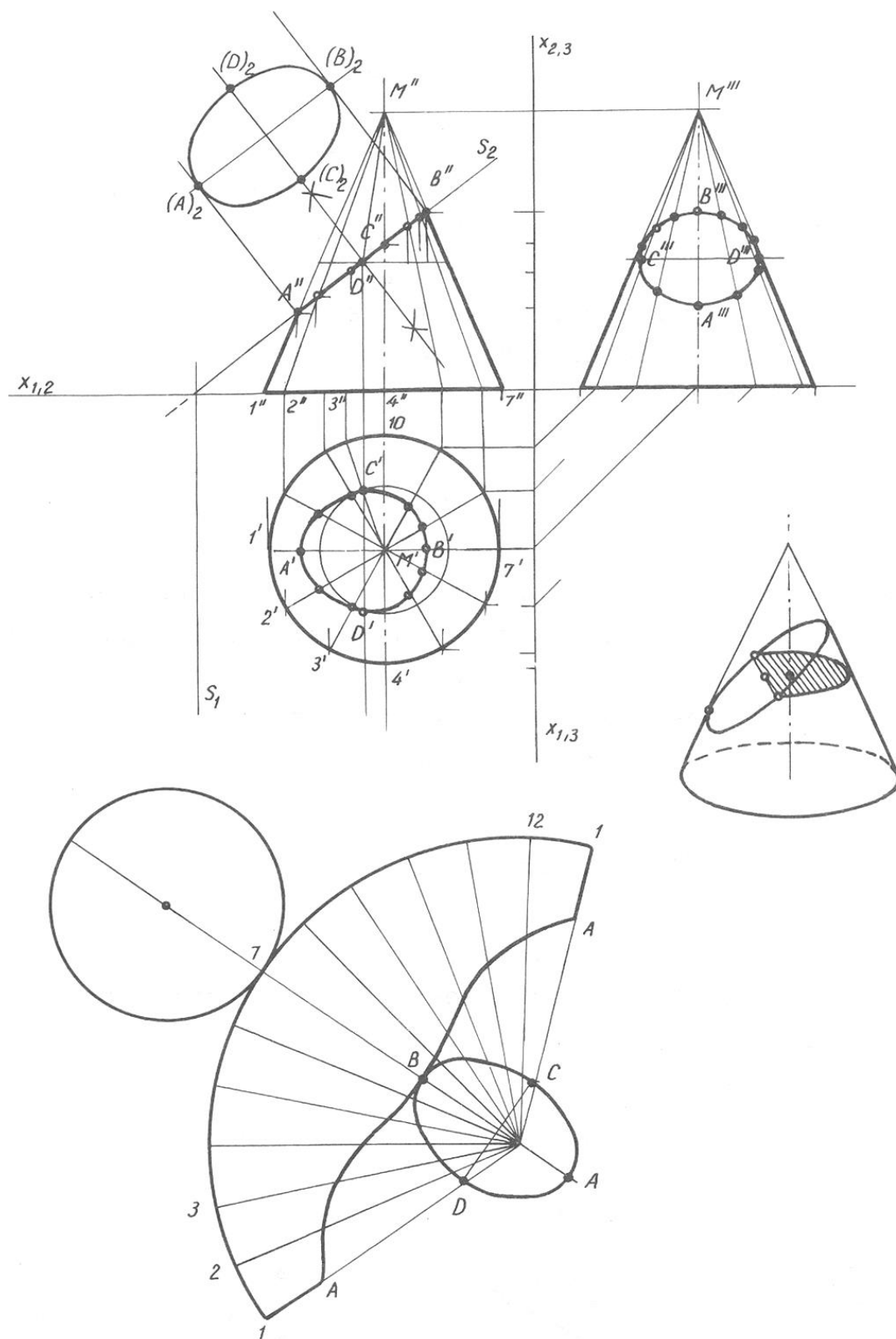
A tengelyek második képét illesztéssel nyerjük, azonban meg kell jegyezni, hogy a metszet ellipszis nagy- és kistengelyének második képe a második képellipszisnek csupán konjugált átmérőpárja lesz. A második képellipszis tengelyeit szerkesztéssel nyerhetjük.

A síkmetszet második kontúralkotón levő pontjait a K_1 és K_2 pontokat a k_1 és k_2 kontúralkotók Σ metszősíkkal való dőféspontjaiként nyerjük. A k_1 és k_2 alkotók Σ síkon való metszéspontját negyedik képen kijelölhetjük, ahonnan a K_1 és K_2 pontok megfelelő képeit rendezőkkel nyerjük. A metszet első vetülete teljes egészében látszik, a második vetület pontjai közül azok látszanak, melyek a kúp második kontúralkotóit tartó α sík előtt fekszenek. Így a görbe $K_1 AK_2$ pontjai által tartott íve látszik előlről.

Az ábrán még feltüntettük a metszetgörbe egy általános helyzetű P pontjában az érintő megszerkesztését.

A P ponthoz tartozó felületi érintősíkot a t_1 és t_2 érintők tartják. E síknak metszősíkkal alkotott metszészvonala a keresett t érintő. Az érintőt meghatározó egyik pont maga a P pont, a másik pont a két sík azonos első fősíkbán fekvő egyenesének és t_2^+ egyenesének R dőféspontja.

Szerkesszük meg három képével adott K_1 -en álló egyenes körkúp síkmetszetét (12.19.ábra). A metsző sík második vetítésű. Rajzoljuk meg a metszetgörbe valódi nagyságát és a kúp hálóját, a lemetszett rész eltávolításával. A fentebb tárgyalt második vetítésű síkkal való síkmetszés szabályait követve, meghatározhatjuk az alkotók metszéspontjait a második képsíkon, majd azok vetítésével az első- és harmadik képsíkokon. A síkmetszet valódi nagyságát transzformálással oldjuk meg. A palástkiterítést az alkotó valódi nagyságának segítségével (ami adott mindhárom képsíkon) megrajzoljuk, majd az alapkör kiterített vonalára felmérjük az alkotópontokat. Ezeket a csúccsal összekötve megkapjuk a teljes palástot. Ezután az elmetszett alkotókat, azonosítva azoknak metszett hosszait a K_2 -ről, fölmérjük a kiterített palástra, majd összekötjük. Így megkaptuk a csonka kúp kiterített palástját.



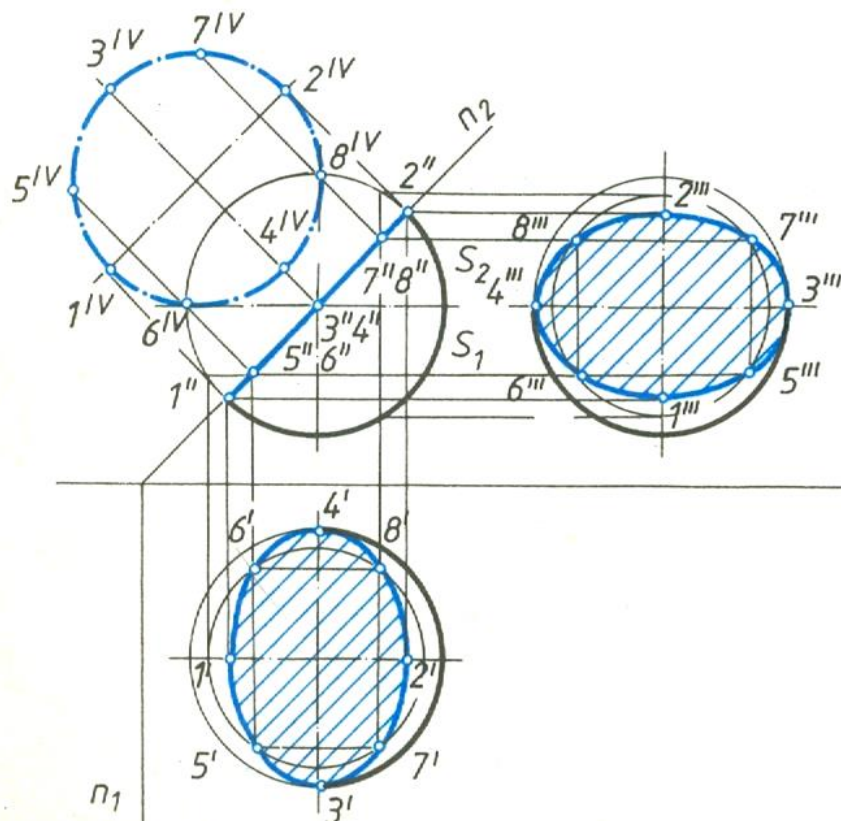
12.19.ábra Kúp síkmetszése és palástkiterítése [2]

12.2.3. Gömb síkmetszése

A 12.20.ábrán látható a gömb síkmetszése második vetítősíkkal, a metszeti idom transzformálása a negyedik képsíkra. Ismerjük a gömb vetületét és az is belátható, hogy vetületéhez hasonlóan a gömb minden síkmetszete is kör lesz. Rajzoljuk meg a gömb három vetületét, jelöljük a metszősík nyomvonalait. A

metszősíknak a gömb főkörével alkotott metszéspontjait (1-4 pont) mindhárom vetületen jelöljük. A szerkesztés pontosításához még két szeletelősíkkal (S_1, S_2) is képezzünk pontokat (5-8 pont). A nyolc pont ismeretében megrajzolható a metszeti idom felülnézete és oldalnézete.

A metszeti idom valódi nagysága transzformálással (vagy beforgatással) kiszerkeszthető, és ha pontosan dolgoztunk, ez egy szabályos kör.



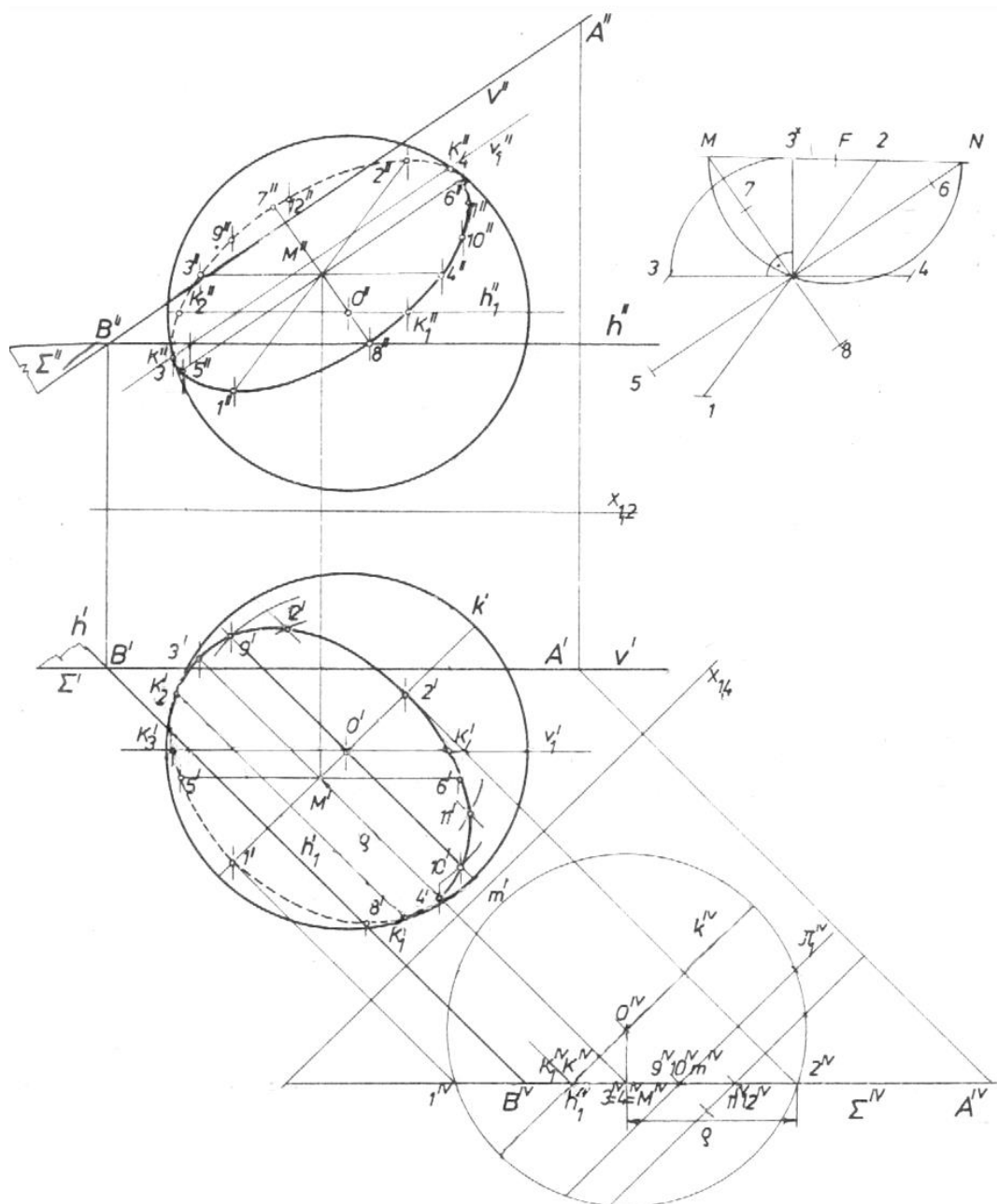
12.20.ábra Gömb síkmetszése [8]

A 12.21.ábrán gömb síkmetszésének szerkesztése látható. A Σ metszősíkot első (h) és második (v) főegyenésével adjuk meg. A sík általános helyzetű dőlt. Ahhoz, hogy a síkmetszet középpontját meg tudjuk határozni, célszerű a metszősíkot második vetítősíkká transzformálni. A transzformációt a sík első főegyenésére merőleges új képtengelyt ($x_{1,4}$) fektetünk, mely adja a K_4 képet. A sík negyedik vetületét a benne lévő A és B pontok transzformálásával szerkesztjük meg. A metszetkör negyedik képen élben látszik. A kör M középpontját és ρ sugarát negyedik képen közvetlenül kijelölhetjük, így $\rho = M^{IV} 2^{IV}$ szakasz hosszával. A kör első és második vetülete ellipszis lesz. Az első kép nagytengelye első főegyenésre, azaz negyedik vetítősugarra esik és 2ρ hosszúságú. Az első kép kistengelyének végpontjait az élben látszó negyedik kép végpontjainak rendezőivel nyerjük. A képellipszist tengelypárja meghatározza. A második kép kis- és nagytengelyét szerkesztéssel nyerjük.

Az első kontúrponthoz a k első kontúrkörében metszi, melynek negyedik képe a rendezőre merőleges szakasz, a síkot pedig h_1 első fővonalban metszi. E kettő közös pontja K_1 és K_2 az első kontúron fekvő síkmetszéspontok. Az első kontúrponthoz negyedik képen közvetlenül kijelölhetők.

A metszetkör második képét illesztéssel nyerjük. A második kontúron fekvő pontokat a második kontúr síkjának és a metszősíknak a v_1 metszévonalára metszi ki a gömb kontúrján. A kontúrponthoz a metszet képe érinti a gömb képkontúrját.

A metszetgörbe további pontjait szerkesztő síkokkal nyerjük. A π_1 szeletelő síkot első fősíknak választottuk, melynek élben látszó negyedik képén kijelölhető az általa kimetszett gömbi kör sugara. Ezzel a sugárral első képen a gömb első képkörrel koncentrikus kör megrajzolható. A szerkesztő sík a metszősíkot az m^{IV} negyedik vetítősugarban metszte, melynek m' első képe az előbb megrajzolt körön a síkmetszet 9 és 10 jelű pontjainak első vetületét adja.



12.21.ábra Gömb síkmetszése [12]

A Gömb palástkiterítése többféleképpen történhet. Jelen esetünkben csak a teljes gömbpalástot szerkesztjük meg.

Az első esetben, az ún. gömbutánzat „gerezdes megoldással” kerül bemutatásra.

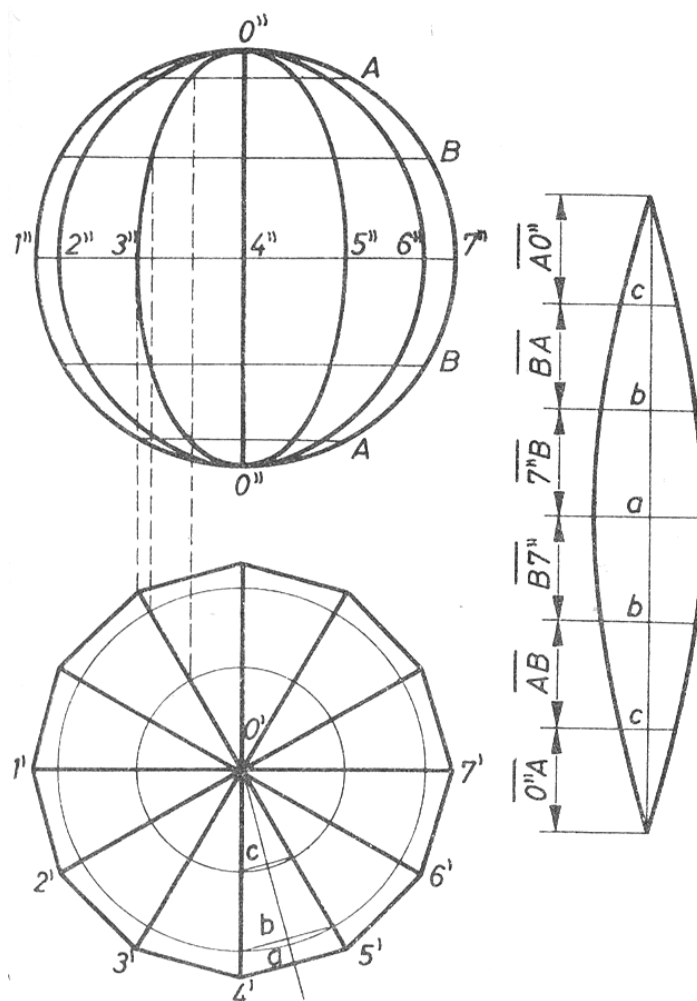
Megrajzoljuk a gömb első- és második képét ábrázoló főköröket (12.22. ábra), majd a gömb második képét adó második főkört felosztjuk egyenlő részekre és az osztópontokat megjelöljük. A második kép főkörének osztópontjaiból húzott vízszintes egyenesekkel, valójában segédkörökkel felosztjuk a kör területét.

A gömb felülnézetét ábrázoló első főkört szintén egyenlő részekre osztjuk. Az osztás pontjaiból a középpontba egyeneseket rajzolunk. Ha az első kép főkörének osztáspontjait is egyenesekkel kötjük össze, akkor a cikkelyek a gömbnek síklemezéből összeállított teljes felülnézeti képét adják.

Rajzoljuk meg az első képen az első főkör (előlnézet) vízszintes osztásának megfelelő köríveket. A kör mindegyike egy-egy pontban metszi a gerezdé éleit. A második kép (előlnézet) teljes képe könnyen megrajzolható, ha figyelembe vesszük azt, hogy a segédkörök által létrehozott metszéspontok minden vetületben azonos segédköríven egy függőlegesbe esnek.

Az egy gerezdé szabásához szükséges lemeznagyság olyan négyszöget képez, amelynek rövidebb oldala a felülnézetet ábrázoló kör egy osztásával, hosszabbik oldala a gömb legnagyobb körének fél területével

egyenlő. Megrajzoljuk a négyszög középegyeneseit, és a négyszög hosszabbik oldalát annyi részre osztjuk, ahány részre a második képet (előlnézet) félkörét osztottuk. Az osztóvonalakra egymás után felmérjük a felülnézet íveinek egy-egy gerezdre eső távolságát. A kapott pontokat összekötve a gömb egy gerezdejének szabásrajzát kapjuk. Megfelelő számú szabásdarabból (az összeépítéshez szükséges ráhagyások figyelembevételével) a gömbutánzat összeállítható.



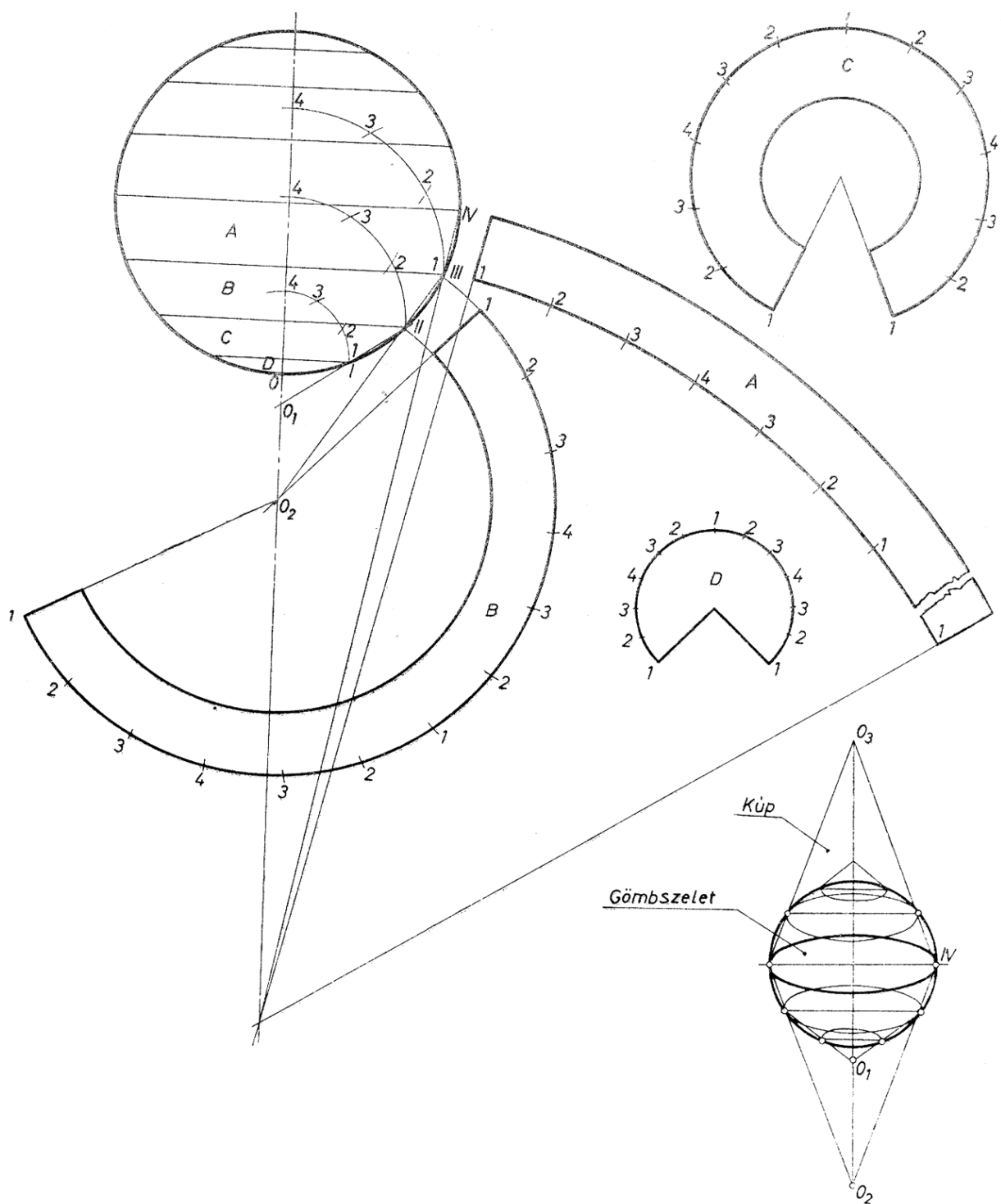
12.22.ábra Kvázi gömbpalást kiterítése „gerezdes módszerrel” [11]

A második esetben a gömbutánzat „öves megoldással” kerül bemutatásra.

A gömbfelület körkúpokra és csonka körkúpokra is bontható. Rajzoljuk meg a gömböt ábrázoló kör-t és ennek függőleges és vízszintes átmérőit. A kör egyik negyedkörét osszuk fel egyenlő részekre (0, I, II, III, IV). Az osztópontokból húzott egyeneseket tekintjük síkoknak, amely síkok a gömböt felszeletelik. Kössük össze az osztópontokat egyenesekkel, amely egyenesek figyelembevételével a gömb egy-egy szelete körkúpként, ill. különböző nagyságú csonka körkúpként fogható fel.

Valamely gömbszelet kiterítését úgy végezzük, hogy azt csonka kúpnek tekintve megrajzoljuk a csúcspontját (O_1 , O_2), és a csonka kúp felületét a már ismert eljárással, számítással és szerkesztéssel terítjük ki (12.23. ábra).

A szabásrajz darabjaiból a szükséges ráhagyásokkal a gömbutánzat összeállítható. A szabásdarabokon végzett megfelelő ívhajlítások és domborítások elvégzésével azokból szabályos gömb is készíthető.



12.23.ábra Kvázi gömbpalást kiterítése „öves módszerrel” [11]

13. TESTEK ÁTHATÁSA

13.1. Síklapú testek áthatása

Áthatásról akkor beszélünk, ha a testeket határoló felületek részben, vagy egészben metszik egymást.

Két síklapú test, (poliéder) áthatásánál feladatunk tehát azon egyenesvonalú, ún. áthatási idom meghatározása, amelynek minden oldala rajta fekszik mindkét poliéder felületén.

Síklapú testek áthatásánál általában két esetet különböztetünk meg:

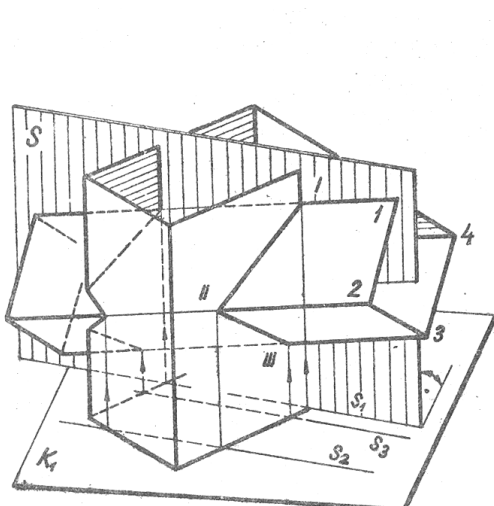
- Ha az egyik poliéder úgy megy keresztül a másikon, hogy minden éle részt vesz a metszésben; ezt teljes áthatásnak nevezzük. Ilyenkor az áthatási vonal két különálló zárt sík-, vagy térsokszög.
- Ha az éleknek csak egy része megy keresztül a másik poliéder felületén. Ekkor bevágásról beszélünk. Ilyenkor a két test lapjainak metszésvonala csupán egy zárt vonalat ad.

Poliéderek áthatásánál egy újabb poliéderről, az ún. áthatási testről is beszélünk, melynek felülete a két poliéder felületéhez tartozik és amelynek csúcspontjai az egyik poliéder éleinek a másik poliéder lapjaival képezett metszéspontjai és viszont. Ha ezeket a metszéspontokat sorrendben összekötjük, a két poliéderfelület metszetét nyerjük.

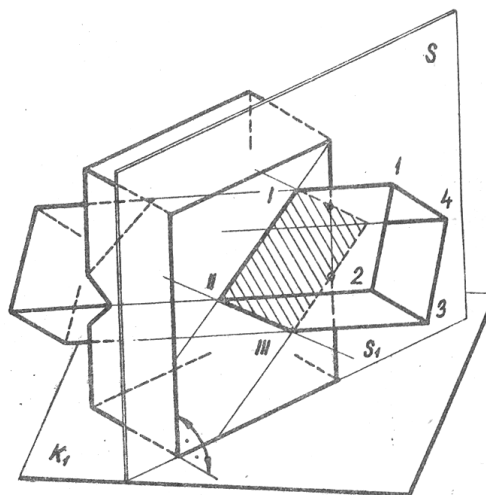
A poliéderek áthatásának szerkesztését, tehát, visszavezethetjük élek dőféspontjainak, ill. lapok metszésvonalainak szerkesztésére. A szerkesztést él-, vagy lapmódszerrel készíthetjük.

Az él módszerrel (13.1.ábra) először megszerkesztjük az egyik test éleinek a másik test lapjaival, majd a másik test éleinek az előző test lapjaival való metszéspontjait. Megállapítjuk a láthatóságot minden élre, majd az élek metszéspontjait, /dőféspontjait/ összekötjük. Ügyelni kell arra, hogy olyan pontokat köthetünk össze, amelyek ugyanazon a lapon fekvő éleken vannak!

A lap módszerrel (13.2.ábra) megszerkesztjük a poliéder két összetartozó lapjának metszésvonalát, melyek majd az áthatási idom oldalait adják. Az él módszer gyorsabb, s így a gyakorlatban inkább ezt használjuk.



13.1.ábra Élmódszer [4]

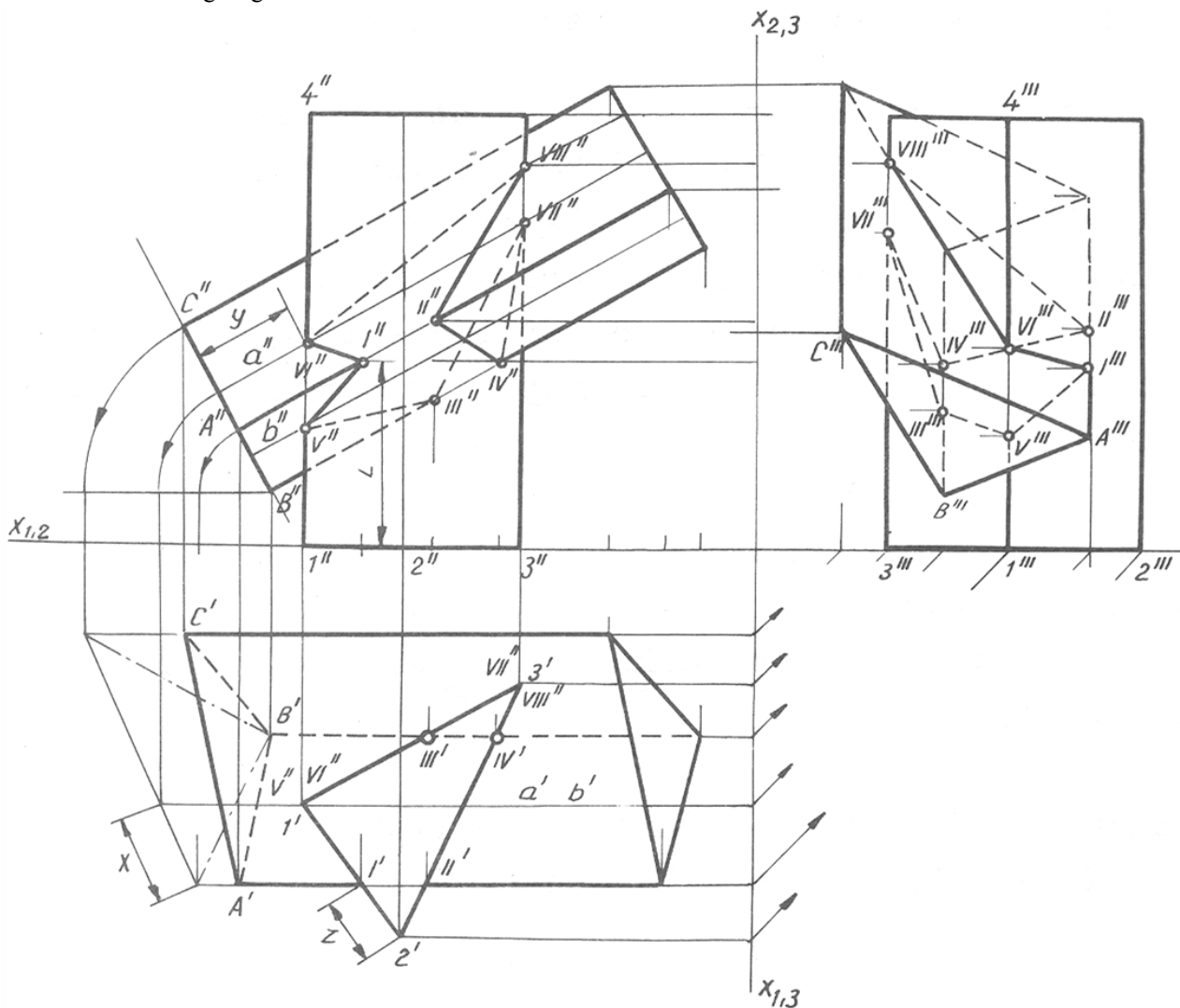


13.1.ábra Lapmódszer [4]

Szerkesszük meg K1-en álló háromszög alapú egyenes hasáb és K2-vel párhuzamos, K1-hez szög alatt hajló oldalélű, ugyancsak háromszög keresztmetszetű hasáb részleges áthatását, valamint a két hasáb oldallapjainak lemeztervét (13.3. és 13.4.ábra).

A feladat megoldása az álló hasáb oldallapjai első vetítésik, tehát a második hasáb oldaléléivel való dőféspontjainak első képét, I'-II',III',IV'-t közvetlenül kapjuk. E pontok második képeit vetítéssel nyerjük. Az álló hasáb I-es alapcsúcsához tartozó oldalélen át K2-vel párhuzamos segédsíkot fektetünk, mely segédsík a másik hasáb oldallapjait a', ill. b' alkotókban metszi. A továbbiakban meghatároztuk vetítéssel a"-t, ill. b"-t, s ahol a két egyenes metszi I''4'' hasáb oldal élt, kapjuk V'', ill. VI'' áthatási pontokat. Hasonló módon jártunk el a VII és VIII áthatási pontok meghatározásánál is.

Az áthatási pontok sorrend és láthatóság szerinti összekötésével nyerjük a két hasáb áthatási vonalát. Az oldallapok kiterítésénél szükségünk van az ABC háromszög /alaplap/ valódi nagyságára. Ábránkon az alaplap második vetítésik, így, a B ponton K2-re merőleges tengely körüli K1-el párhuzamos helyzetbe forgatva kapjuk a háromszöget valódi nagyságban. Tekintettel arra, hogy mind a két hasáb oldalélei K2-vel párhuzamos helyzetűek, a valódi hosszok a második képen közvetlenül lemérhetők. A hasábok oldallapjain lévő áthatási pontokat a rájuk illeszkedő alkotók segítségével visszük át a lemeztervre.

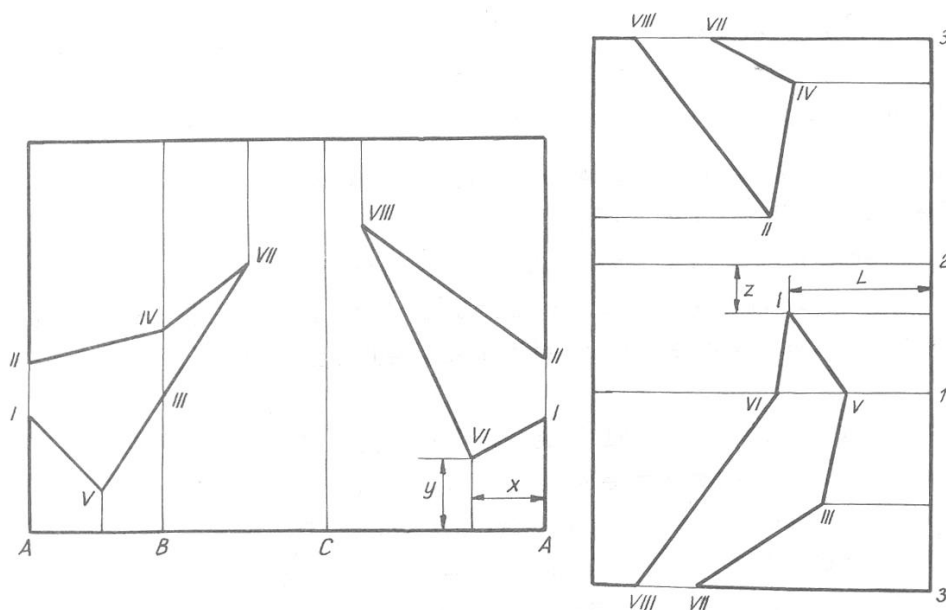


13.3.ábra [2]

Szerkesszük meg K1-en álló szabályos ötoldalú egyenes hasáb és K4-en álló ferde gúla áthatását (13.5.ábra).

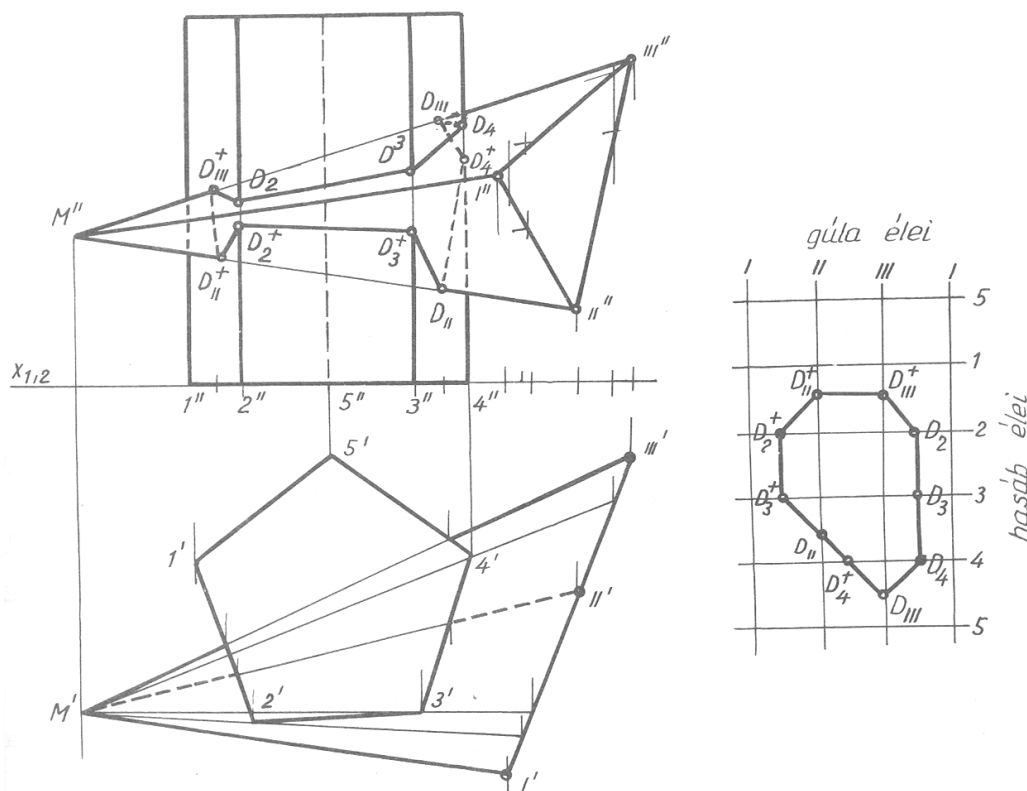
A feladatot élmódszerrel (13.1.ábra) oldjuk meg. Az áthatási pontok az első képen közvetlenül láthatók, a második képeket vetítéssel, vagy alkotókra helyezéssel állapítjuk meg.

Az áthatási pontok sorrend szerinti összekötésének legcélravezetőbb módját a következő módon készíthetjük:



13.4.ábra Palástkiterítés [2]

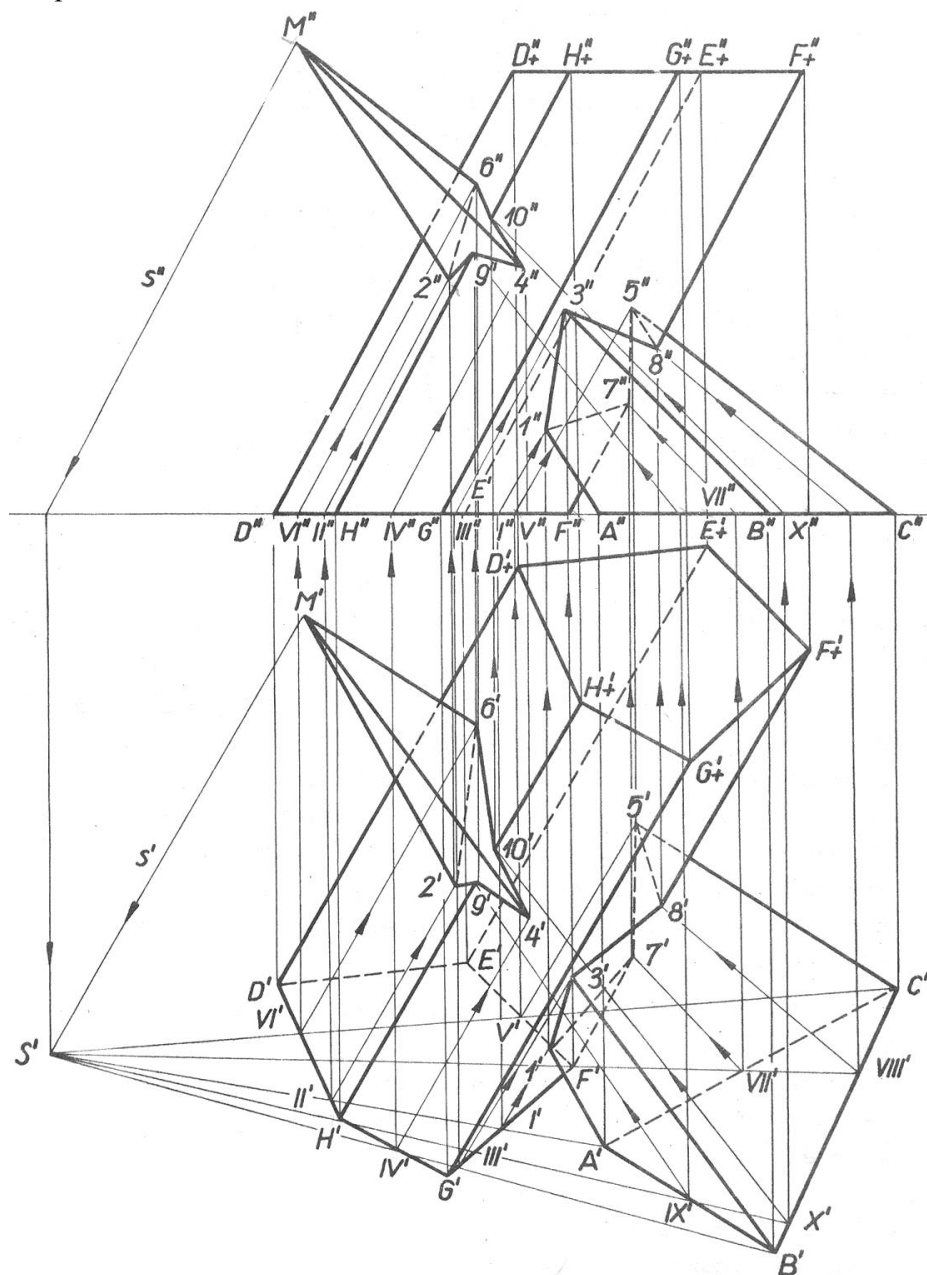
Négyzethálót készítünk. A vízszinteseket, mint a hasáb oldaléleit, a függőlegeseket, mint a gúla oldaléleit arab, ill. római számokkal megszámozzuk. A hasábnál az 5-ös, a gúlánál az I-es oldalélet kétszer vesszük. Azután sorba vesszük az éleket, amelyeknek a másik testtel vannak áthatási pontjai.



13.5.ábta [4]

Pl. a hasáb 2-es oldaléle metszi a gúla I,III lapját D_2 pontban. A hálózat 2-es egyenesén a I és III függőleges közé jelölünk /középre/ egy pontot és nevezzük D_2 -nek, mivel a 2-es él metszéspontjáról van szó. A 2-es él még metszi a gúla I-II lapját is. A hálózat 2-es egyenesén az I és II függőleges közé bejelöljük a $D+2$ pontot is.

Így visszük át a hálózatra az összes áthatási pontot. Munkánkat megkönnyítjük, ha a pontok bejelölését azok szerkesztésével egy időben végezzük. Amikor az összes áthatási pontot bejelöltük a hálózatba, bármelyik pontból elindulva úgy kötjük össze a pontokat, hogy a hálózat által alkotott kis négyzet egyik oldalán lévő pontot összekötjük a kis négyzet másik oldalán lévő ponttal, s így tovább. Ezután a hálózatról pontosan leolvashatjuk a metszésponatok összekötésének sorrendjét, s ugyanilyen sorrendben kötjük össze az ábrán is az áthatási pontokat.



13.6.ábra [1]

Adott az első képsíkon álló ötszög oldalú ferde hasáb, továbbá a vele közös térrésszel rendelkező háromoldalú ferde gúla (13.6.ábra). Szerkesszük meg a két test áthatását.

A gúla M csúcspontjára illeszkedő és a hasáb oldaléléivel párhuzamos s sorozóegyenesen áthaladó segédsíkokat alkalmazunk. Minden ilyen segédsík a gúlát és a hasábot alkotókban vagy oldalélekben metszi. Megkeressük a sorozóegyenes metszéspontját a vezérpolygonok közös alapsíkjával, K_1 -el. A segédsíkoknak az alapsíkkal alkotott metszévonalai a sorozóponton és az alapsíkban fekvő polygonok csúcsain át rajzolhatók meg.

A gúlaélekre illeszkedő segédsíkok nyomvonalai rendre az S' -t az A' , B' , C' pontokkal összekötő egyenesei. A nyomvonalak a hasáb vezérsokszögét a I , II , III , IV , V , VI pontokban metszik. Ezek a pontok a

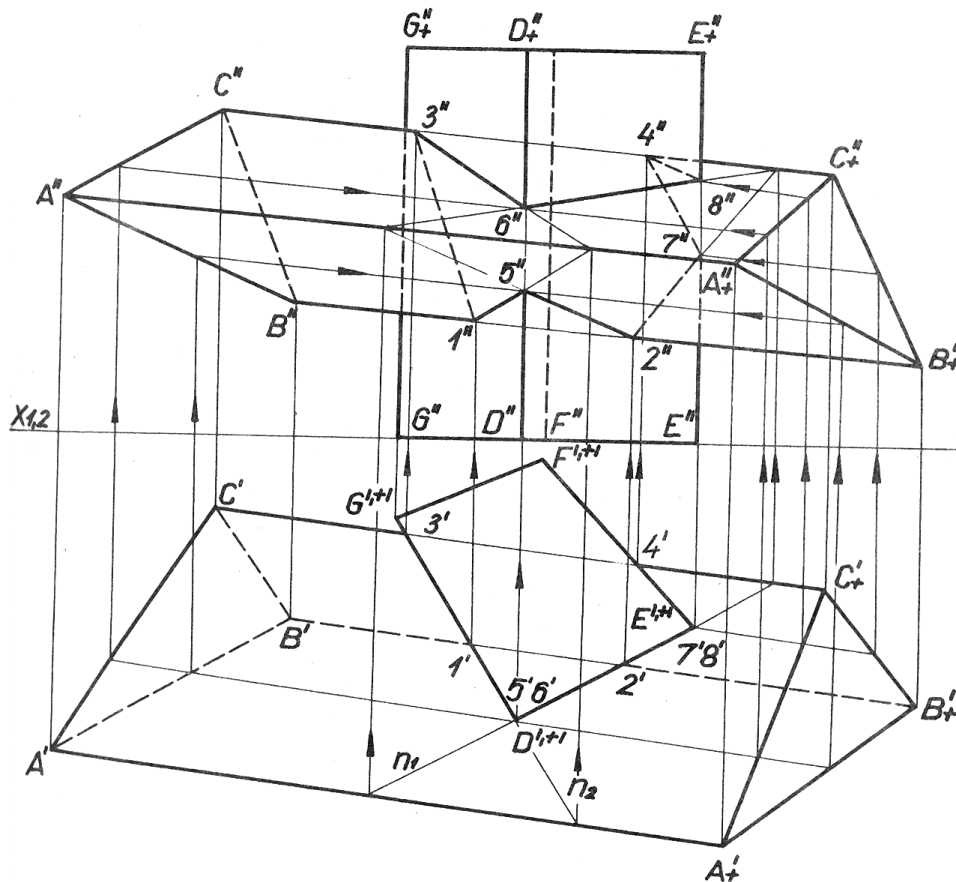
hasáblapokon fekvő azon alkotók talppontjai, amely alkotók a gúlaélekből az 1,2,3,4,5,6 áthatási pontokat metszik ki. A szerkesztést mindkét képen elvégeztük.

Ezek után meg kell vizsgálni, hogy az egyes hasáb élek hol metszik a gúla lapjait. A sorozósík nyomvonalai most az $S'F'$ illetve $S'H'$ összekötő egyenesek lesznek, melyek a VII'VIII' IX' X' talppontokat metszik ki. Az alkotókat a gúla csúcspontjába vezetve és metszésbe hozva a megfelelő hasábélekkel, nyerjük a 7,8,9,10 áthatási pontokat. A DD^+ , EE^+ , GG^+ élek nem vesznek részt az áthatásban, mert sorozó síkjaik nyomvonalai elkerülik a gúla alapháromszögét.

Az áthatási pontok összekötését, illetve a láthatóság szerinti kihúzást a térszemléletre támaszkodva végeztük el.

A 13.7.ábrán közös térrésszel rendelkező első képsíkon álló négyoldalú egyenes hasábot, valamint egy általános helyzetű háromoldalú hasábot adtunk meg. Szerkesszük meg a két test áthatását.

A kedvező helyzet folytán az egyes áthatási pontok meghatározásakor többféle gondolat-menetet követhetünk.



13.7.ábra [1]

- 1) A négyoldalú oszlop élei vetítősugarak, oldallapjai első vetítő síkok. Az 1,2,3,4 áthatási pontok meghatározásakor tehát feladatunk első vetítő síkok (a négyoldalú hasáb egyes lapjai) és általános helyzetű egyenesek (a háromoldalú hasáb egyes élei) dőléspontjainak a megkeresése. A dőléspontok első képeit közvetlenül, a második képeket vetítéssel nyerjük.
- 2) Megrajzoljuk az n_1 illetve n_2 első nyomvonalakat és illeszkedési pontok segítségével megszerkesztjük a metszetidomok második képeit. A megfelelő élek második képeinek közös pontjai nem egyebek, mint a 7,8,5,6 áthatási pontok második képei (lapmódszer).
- 3) A négyoldalú hasáb EE^+ , illetve DD^+ élein keresztül a háromoldalú hasáb éleivel párhuzamos első vetítő síkokat fektetünk. Meghatározzuk a két-két kimetszett alkotó második képét. Az élek és az alkotók második képeinek metszése adja 7'', 8'', 5'', 6'' áthatási képpontokat. Ez utóbbi módon ellenőriztük előbbi szerkesztésünk helyességét. Az áthatási pontok összekötését ezúttal táblázat segítségével végeztük el.

A táblázatban mind a nyolc dőféspont mellé odaírtuk, hogy az illető dőféspont az egyik, illetve a másik hasáb melyik lapján fekszik. Megjegyezzük, hogy ha a dőféspont pl. az egyik test élére kerül, akkor annak a két lapnak a jele kerül beírásra, amelyek a szóban forgó élben metszik egymást. Ezek után kiválasztottunk egy pontot, pl. az l -et, és olyan pontot kerestünk, amely mellett azonos lapok szerepelnek, pl. az 5. Következő a 2 pont, amely mellett az előbbivel azonos lapok szerepelnek. Ily módon végezve az összekötést, eredményül a 1-5-2-7-4-8-6-3-1 zárt láncot kapjuk.

Dőféspont	Háromoldalú hasáb lapjai	Négyoldalú hasáb lapjai
1	$AA^+ BB^+, BB^+ CC^+$	$DD^+ GG^+$
2	$AA^+ BB^+, BB^+ CC^+$	$DD^+ EE^+$
3	$AA^+ CC^+, BB^+ CC^+$	$DD^+ GG^+$
4	$AA^+ CC^+, BB^+ CC^+$	$EE^+ FF^+$
5	$AA^+ BB^+$	$DD^+ GG^+, DD^+ EE^+$
6	$AA^+ CC^+$	$DD^+ GG^+, DD^+ EE^+$
7	$BB^+ CC^+$	$DD^+ EE^+, EE^+ FF^+$
8	$AA^+ CC^+$	$DD^+ EE^+, EE^+ FF^+$

Adott egy, az első képsíkon álló szabályos háromszög alapú gúla és egy, az első képsíkkal párhuzamos oldalélű, háromoldalú hasáb (13.8. ábra). Szerkesszük meg a két test áthatását és tüntessük fel a láthatóságot.

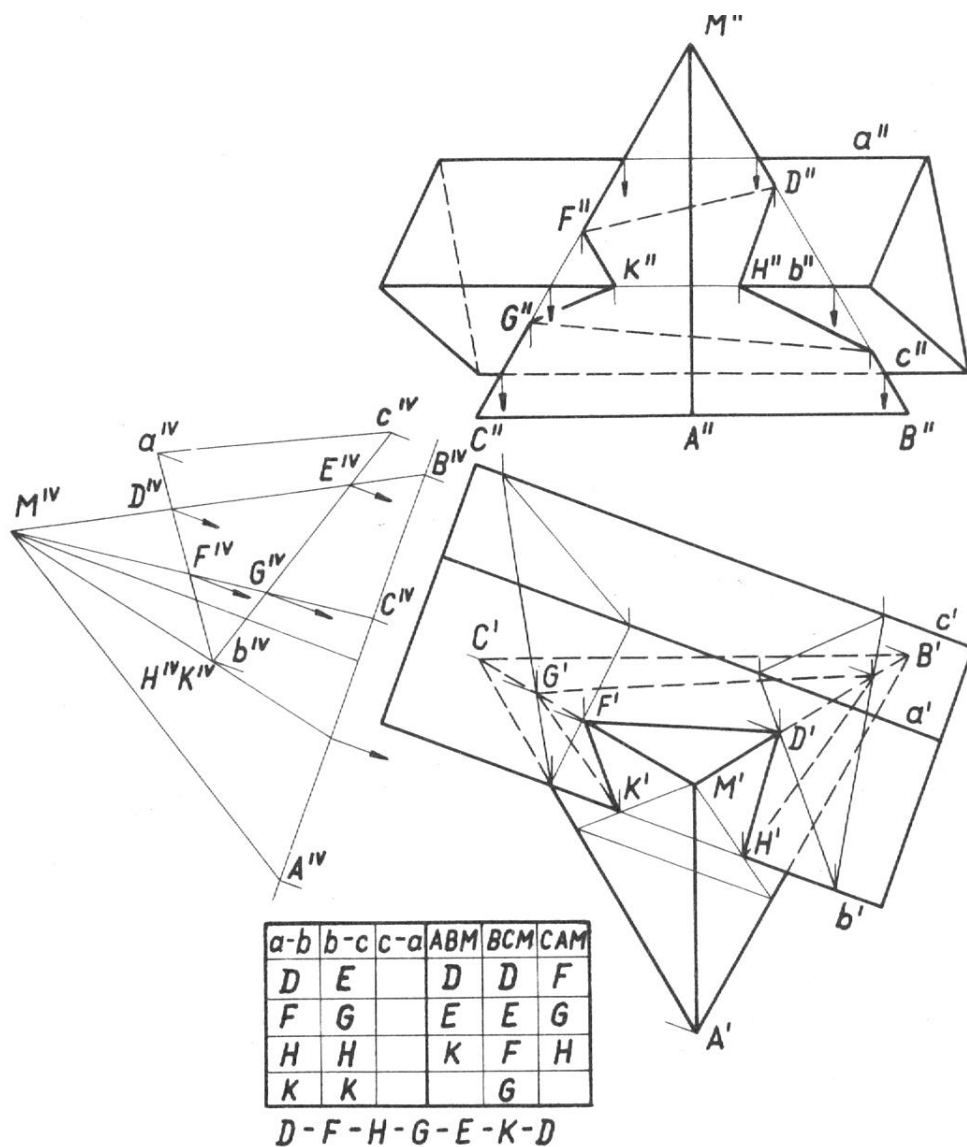
A szerkesztést transzformációval végezzük el, de bemutatjuk az élmódszert is.

Mivel a hasáb oldalélei fővonalak, egyszeres transzformációval elérhetjük azt, hogy az oldalélekből vetítésugarak, az oldalsíkokból vetítésíkok legyenek. Ezért előnyös ennél a feladatnál ez a módszer.

Az új képsíkot meghatározó $X_{1,4}$ tengelyt, a hasáb oldalélek első képére merőlegesen felvéve, megszerkesztettük a gúla és a hasáb negyedik képét. Az új képből kitűnik, hogy az a és c hasábél, valamint az AM gúlaél nem vesz részt az áthatásban. A BM élen a D és E dőféspontok, valamint a CM élen az F és G dőféspontok közvetlenül adódnak. A b élre illeszkedő H és K dőféspont első képét, mint az ACM , ill. ABM síkra illeszkedő pont hiányzó képét szerkesztettük meg.

Élmódszer használata esetén minden élre egy-egy segédsíkot illesztünk és megkeressük ennek a másik test lapjaival alkotott metszésvonalát. A BM élre illesztett második vetítésík a hasáb oldallapjait háromszögben metszi. Ennek hiányzó első képe rendező vonallal kijelölhető. A háromszög és a BM él metszéspontjai a D' és E áthatási pontok. Hasonlóképpen kaptuk az F és G pontokat. A b élre illesztett második vetítésík a gúla oldallapjait háromszögben metszi. Ennek hiányzó első képe rendező vonallal kijelölhető. A háromszög és a b él metszéspontjai a H és a K áthatási pontok.

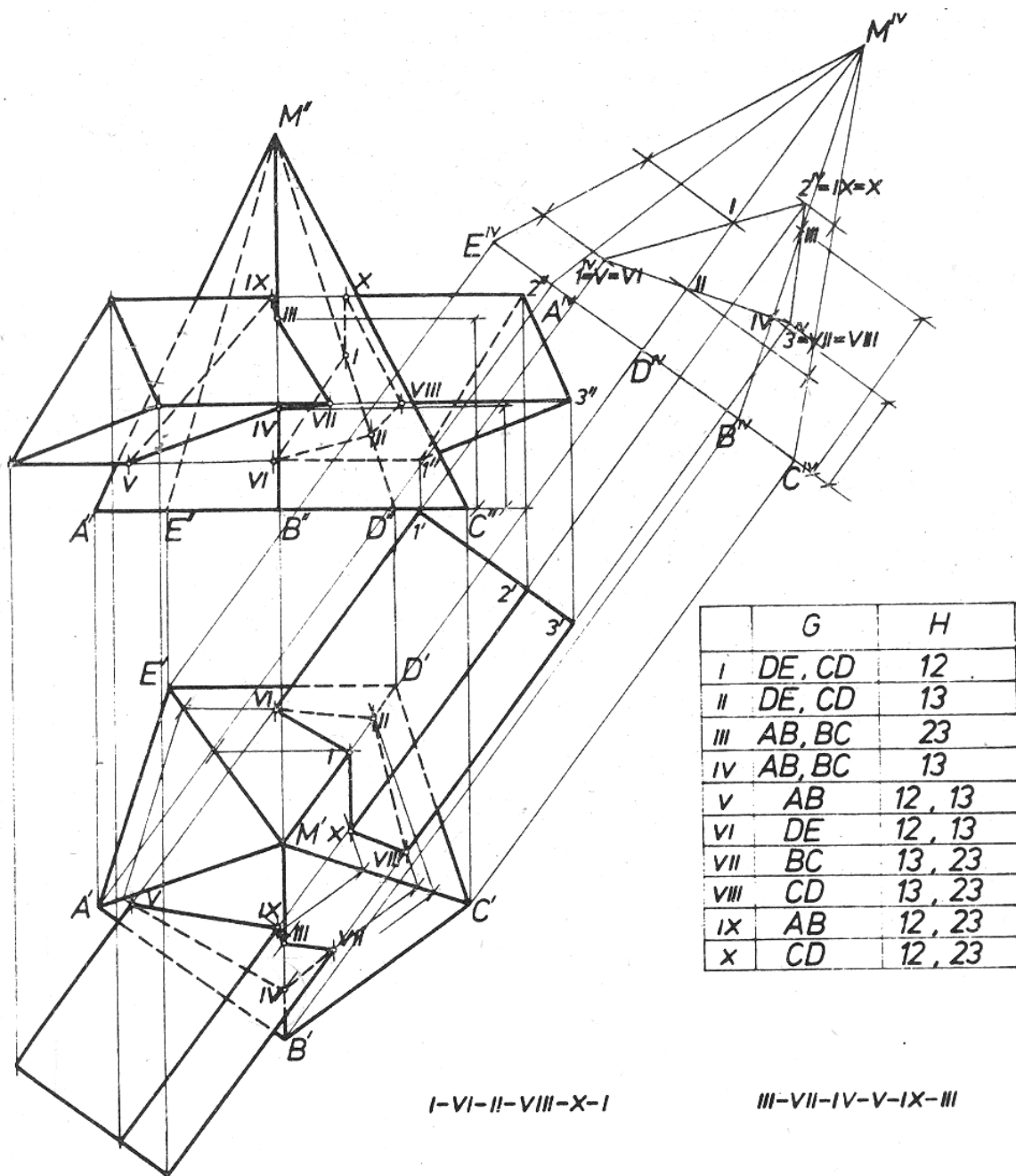
Az áthatási pontok összekötéséhez táblázatot készítettünk. A táblázatból kitűnik, hogy az áthatási pontok a gúla és a hasáb melyik oldallapján- helyezkednek el. Azok a pontok, amelyek rajta vannak mindkét testnek az egyik lapján, összeköthetők. A láthatóságot vagy fedőpontokkal, vagy szemlélet alapján dönthetjük el.



13.8.ábra [1]

A 13.9. ábrán adott egy első fősíkon álló szabályos ötoldalú gúla és egy háromoldalú egyenes hasáb, melynek oldalélei első főegyenesei. A két test áthatási vonalát traszformáció segítségével határozzuk meg. Ugyanis, ha a hasáb éleit vetítőegyenesekké traszformáljuk, akkor feladatunkat könnyen megoldhatjuk. Először a gúla élein adódó áthatási pontokat szerkesztjük meg. Mivel az MD él negyedik rendező irányú, ezért a rajta adódó I és II pontokat csak segédsíkkal nyerhetjük. Segédsíkul, a gúla alapjával párhuzamos síkot választottunk. Az MB élen létrejött III és IV jelű pontokat első vetületen rendezővel nyertük, második vetületüket azonban csak az ismeretes negyedik rendezőjük második vetületre való felmérése útján kaptuk, mivel az MB él profilél. A hasábéleken adódó pontokat ugyancsak első fősíkkal való szeletelés útján nyertük. Az összekötés megkönnyítésére ismét táblázatot készítünk. A láthatóságot úgy állapítottuk meg, hogy egyik testet sem távolítottuk el a helyéről. Az áthatási vonal két zárt térbeli törött vonalból áll, mert a hasáb minden éle részt vett az áthatásban, azaz a hasáb "átfúrta" a gúlát. Ha a gúlát eltávolítanánk a közös résszel együtt, akkor a hasáb két különálló részre esne szét. A hasáb és a közös rész eltávolítása után a "lyukas" gúla maradna.

Ha az áthatásban résztvevő testek mindegyike gúla, akkor a traszformáció nem alkalmazható, helyette segéd-metszősíkokkal oldjuk meg a feladatot.



13.9.ábra [12]

A 13.10. ábrán adott egy első fősíkon álló szabályos hatoldalú hasáb és egy első főegyenestől három oldalú egyenes hasáb. Keressük a két test áthatási vonalát. Az első vetületből azonnal megállapíthatjuk, hogy a várható áthatási vonal egy darabból álló térbeli zárt törött vonal, mert az álló testnek az E, F és D jelű élei, a fekvő hasábnak pedig a 3-as jelű éle nem vesznek részt az áthatásban.

Az álló hasáb élei első vetítésű sugarak, az oldallapjai első vetítésű síkok. Így, az AF élek által tartott lapon adódó I, a CD lapon II, és IV, az AB lapon a III jelű dőfés pontok első vetületei közvetlenül kijelölhetők, második képeiket egyszerűen rendezőkkel nyerjük a fekvő hasáb 1 és 2 jelű éleinek második képén.

Ezzel, a fekvő hasáb élein adódó két-két dőféspontot megszerkesztettük. Az álló test vetítésű sugarai, adódó áthatási pontokat szeletelő síkokkal nyerjük. Az V és VI jelű pontokat a 2-es éllel párhuzamos első vetítésű síkkal, a VII VIII IX, X pontokat pedig az álló hasáb oldalfalainak első vetítésű síkjával határozzuk meg.

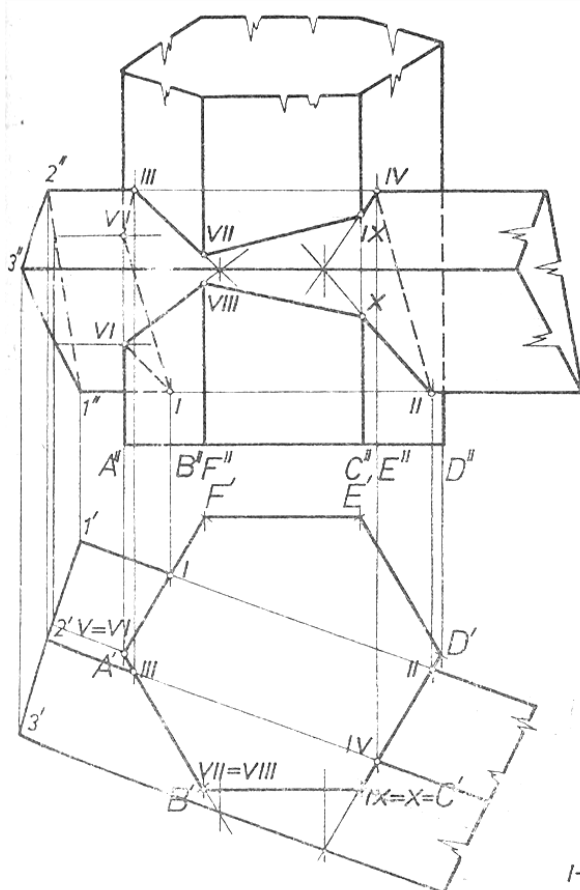
A pontok megszerkesztése után azok összekötése következik. Ennél a lépésnél nagyon ügyeljünk arra, hogy csupán olyan két pont köthető össze, amelyik mindkét testnek ugyanazon oldalán fekszik. Csak ekkor adja az összekötésük a két test egy-egy lapjának metszévonalát.

A pontok összekötésének sorrendjét könnyen megállapíthatjuk egy olyan táblázatból, amelyben feltüntetjük mindkét síklapu testnek azt a lapját, illetve élét, amelyiken a megszerkesztett döféspont fekszik.

A táblázatban minden döféspont jele mellé odaírjuk, hogy az illető pont a háromoldalú hasábnak (H_3) és a hatoldalú hasábnak (H_6) melyik lapján fekszik. Ha a döféspont az egyik testnek egy élén fekszik, akkor annak a két lapnak a jelét írjuk be, amelyek az élben metszik egymást. Például az 1 döfés pont a H_6 hasáb AF élek által tartott lapján, a H_3 hasábnak pedig 12, 13 lapjainak metszévonalán helyezkedik el. Ekkor a táblázatba az 12, 13 jeleket írjuk (hiszen az 1-es jelű oldalél mindkét lapon rajta van).

Ha elkészült a táblázat, kiválasztjuk egy pontját, például az I jelű pontot. Ez a pont a táblázat szerint az álló hasáb AF lapján, a fekvő hasábnak pedig 12, 13 lapjain fekszik. Most keressünk a táblázatban egy másik olyan pontot, amely mellett ugyanezek a lapok szerepelnek. Ilyen a V jelű pont, amely az álló hasáb AB , AF lapján, a fekvő hasábnak pedig 12 lapján fekszik. Az I és V jelű pontok tehát összeköthetők. Így folytatjuk tovább a sort, mígnem kialakul az összekötés sorrendje.

Végigvizsgálva valamennyi pontot, várákozásunknak megfelelően visszajutottunk az I-hez. Az egymással összeköthető pontokat egymás után leírjuk, s adódik az I-V-III-VII-IX-IV-II-X-VIII-VI-I sorrend. Az áthatási sokszög megszerkesztése után feltüntetjük a láthatóságot is. A láthatóság megállapításánál figyelembe kell venni, hogy a testek részben egymást is eltakarják. Az áthatási sokszögből csak az látszik, ami mindkét test látható részén van. A láthatóságot úgy tüntettük fel, hogy mindkét testet a helyén hagytuk.

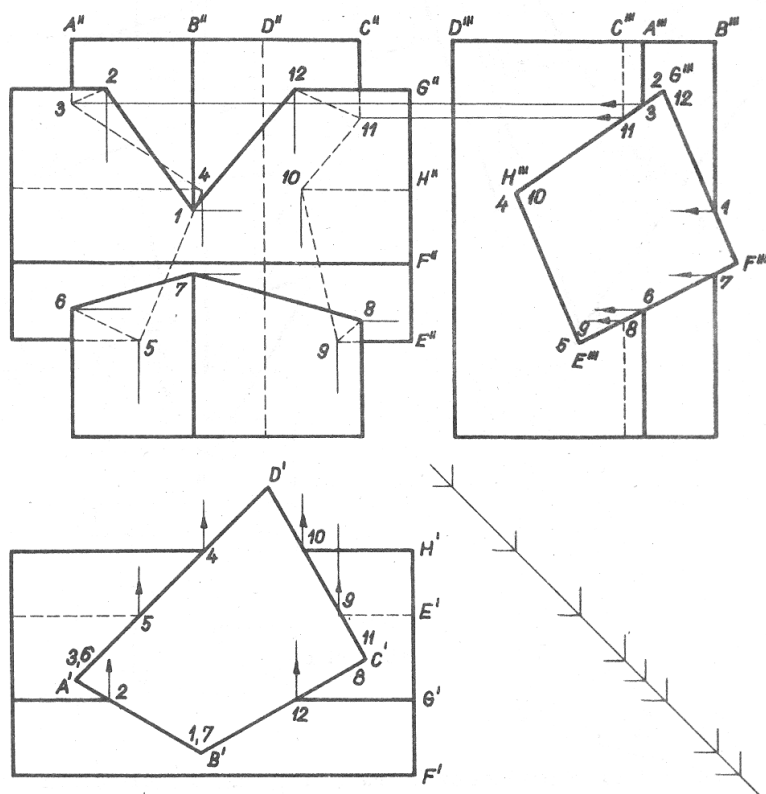


	H_3	H_6
I	12, 13	AF
II	12, 13	CD
III	23, 12	AB
IV	23, 12	CD
V	12	AB, AF
VI	13	AB, AF
VII	23	AB, BC
VIII	13	AB, BC
IX	23	BC, CD
X	13	BC, CD

I-V-III-VII-IX-IV-II-X-VIII-VI-I

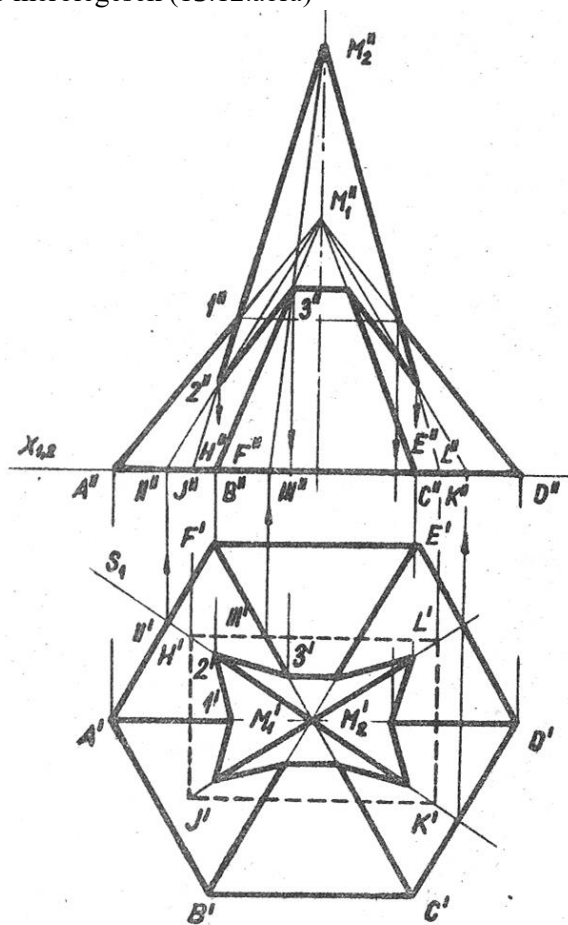
13.10.ábra [12]

A 13.11. ábrán kidolgozott példa esetén mivel az ábrákból világosan kiolvasható a megoldás menete, ezért a részletesebb leírástól eltekintünk.



13.11. ábra [1]

Szerkesszük meg K_1 -en álló szabályos hatszögalapú: G_1 - és téglalapalapú: G_2 -jelű gúla áthatását. A tengelyek egybeesnek és K_1 -re merőlegesek (13.12.ábra)



13.12.ábra [4]

A G_1 -jelű gúla: AM_1 és M_1D oldaléleinek G_2 gúlával való dőféspontjait a második képen közvetlenül kapjuk (a kontúralkotók metszésében), az első képeket levetítéssel határozzuk meg. Ábránkon csak az AM_1 oldalél áthatási pontjait jelöljük $1 (1'1'')$ -es számmal.

A G_2 -jelű gúla HM_2 és M_2K oldalélein keresztül első vetítésíkot fektettünk, mely az alapsíkot S_1 nyomvonalban, a gúla felületét (csak az egyik oldallapon lett jelölve), $II'M'_1$ alkotóban metszi. Az alkotó második képe: $II''M''_1$ a $H''M''_2$ oldalélen kimetszi a $2 (2'2'')$ áthatási pontot. A G_2 jelű gúla oldalélein lévő áthatási pontok a 2-es ponthoz viszonyítva, szimmetrikusan helyezkednek el. Hasonló módon került szerkesztésre a G_1 -jelű gúla $3 (3'3'')$ -as és a vele szimmetrikusan elhelyezkedő áthatási pontjai is. Az áthatási pontok sorrendben való összekötése az első képben, szemlélet alapján is könnyen megállapítható.

13.2. Forgástestek áthatása

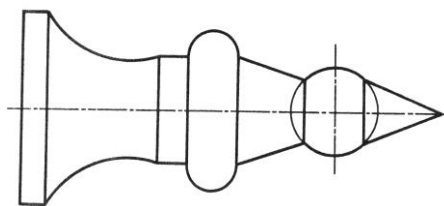
Két vagy több egymással érintkező, egymásba hatoló forgástest közös pontjai áthatási vonalakat alkotnak. A forgásfelületek áthatási vonala általában térgörbe. Térgörbének nevezzük az olyan görbét, amelynek pontjai nincsenek egy síkban.

A forgástestek áthatásának három szerkesztési elve van. Az első esetben a forgástesteknek közös tengelye van. A második szerkesztési elv az egymást metsző tengelyű forgástestek, a harmadik az általános megoldás, amikor szeletelősíkokkal jutunk áthatási pontokhoz.

13.2.1. Közös tengelyű forgástestek áthatása

A forgástestek áthatásának legegyszerűbb esete, ha az áthatásban levő két forgástest tengelye egybeesik. A 14.1. ábra közös tengelyű forgástestek áthatását szemlélteti.

Az alkotók metszéspontja vagy metszéspontjai forgatás során a két felület közös pontjait, áthatását adják, ami a tengelyvonalra merőleges kör lesz.

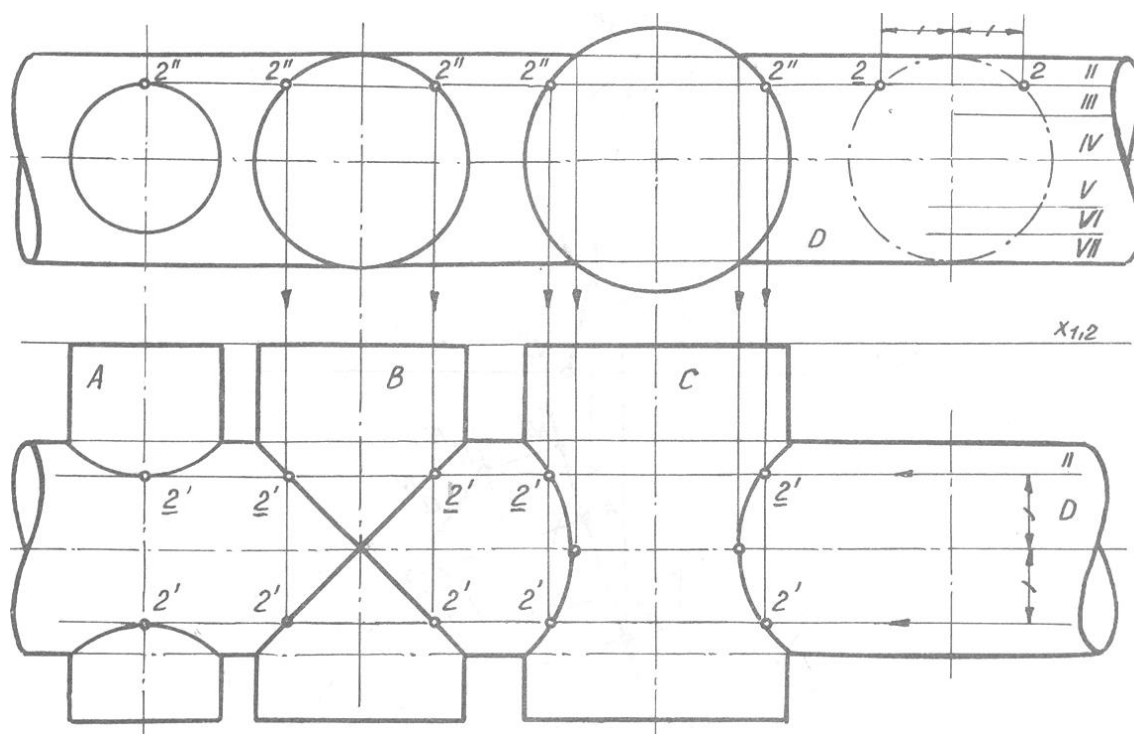


13.13. ábra Közös tengelyű forgástestek [10]

13.2.2. Metsződő tengelyű forgástestek áthatása

A metsződő tengelyű forgástestek áthatását különböző átmérőjű és azonos átmérőjű hengerek áthatásának példáin keresztül vizsgáljuk (13.14. ábra).

Vegyünk fel két különböző sugarú hengert, amelyeknek tengelyei metszik egymást. A tengelyek legyenek a második képsíkkal párhuzamosak és az egyszerűbb szerkesztés érdekében, egymásra merőlegesek.

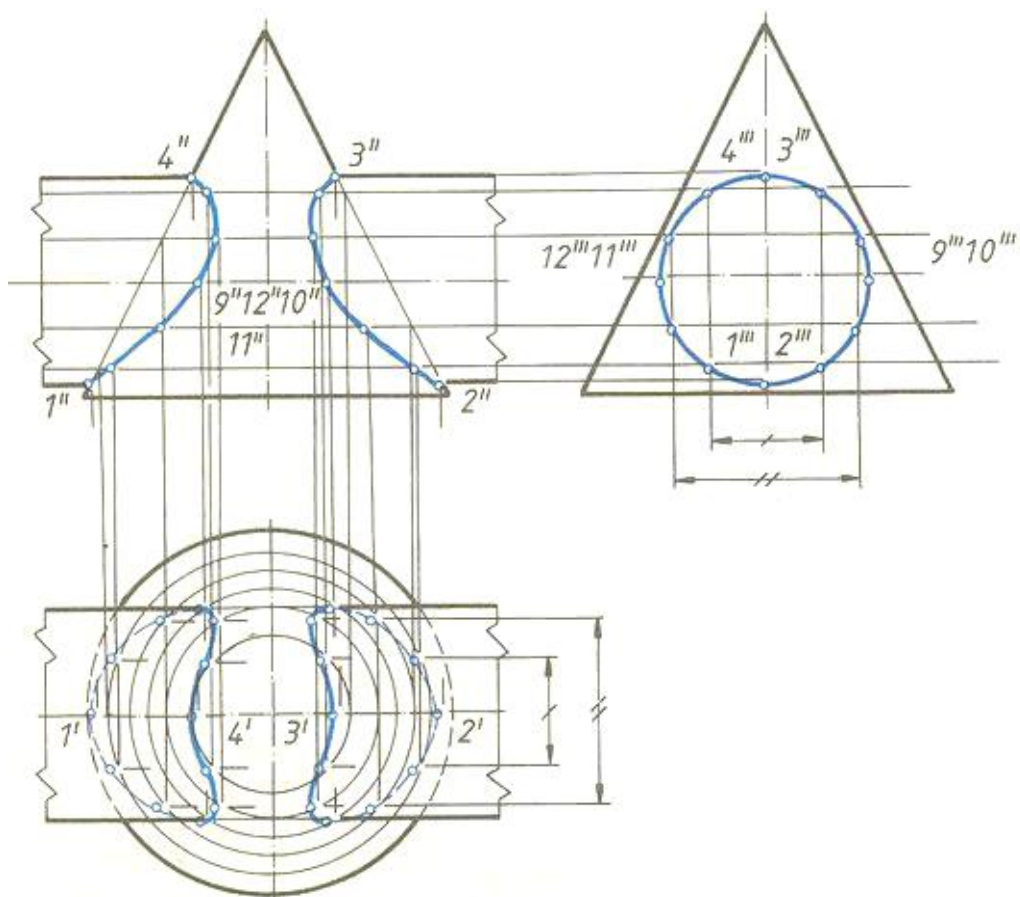


13.14. ábra Metsződő tengelyű forgástestek áthatásai [5]

A szeletelő módszer a leggyakrabban használt módszer az áthatási vonal megszerkesztésére. Lényege az, hogy alkalmasan megválasztott párhuzamos szeletelősíkokkal elmetsszük az áthatásban lévő két testet. A szeletelősík mind a két testet egyszerű vonalban metszi. A két vonal metszéspontjai adják a szeletelősíkban fekvő áthatási pontokat. Tehát az áthatási vonal pontjainak megszerkesztését síkmetszésre vezetjük vissza.

A 13.15. ábrán adott az egyenes forgáskúp és a henger áthatása. A kúp és henger áthatási vonalának megszerkesztése látható három vetületen. Jól láthatóak a szeletelősíkok melyeket a henger keresztmetszetén vettünk fel, úgy, hogy a kört 12 egyenlő részre osztottuk. Ezeken vettük fel a szeletelősíkokat melyek meghatározzák az adott síkokhoz tartozó áthatási pontokat. A hét szeletelősík összesen 24 szerkesztési pontot ad. Az szerkesztés szempontjából az optimális kép az, amelyen a henger keresztmetszete látható. Esetünkben a két test speciális helyzetben van, mert a forgástengelyeik metsződőek. Ezért az áthatási vonalak képei a képsíkokon tükörszimmetrikusak és fedőgörbék is lesznek.

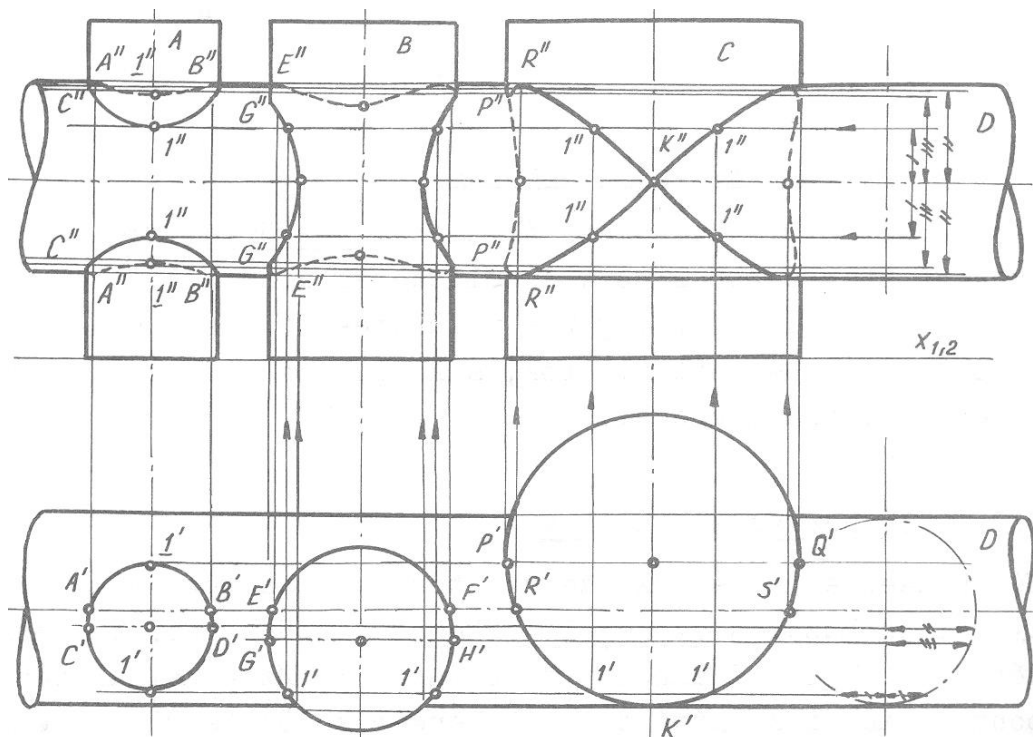
Minden áthatásban speciális, vagy általános helyzetben helyezkednek el a testek (síklapú vagy forgástestek) egymáshoz és a síkokhoz képest: megkülönböztetünk teljes és részleges (bemetszéses) áthatást. A teljes áthatás az, amit a példában is láthatunk. A henger minden alkotója átdöfi az alaptestet, azaz a forgáskúpot. A teljes áthatásnál az áthatási görbékről beszélünk, mert az alaptest egyik oldalán találhatóak a bemeneti, a másik oldalán a kimeneti pontok. A bemetszéses esetben az átható test csak adott alkotóival döfi át az alaptestet. Ezért csak egy áthatási görbe fog keletkezni. Későbbiekben erre az esetre is láthatunk példákat.



13.15.ábra Kúp és henger áthatásának megoldása szeletelő módszerrel [8]

13.2.3 Kitérő tengelyű forgástestek áthatásai

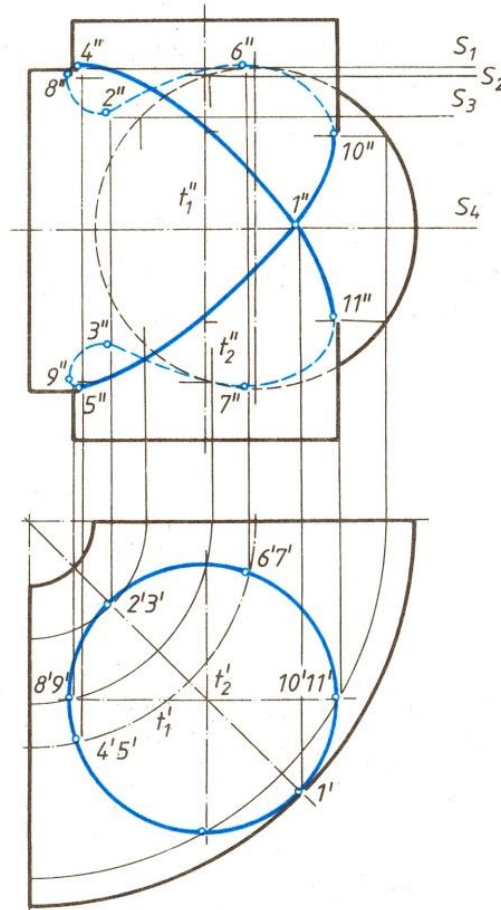
A 13.16.ábrán látható különböző méretű hengerek áthatási görbéinek szerkesztését láthatjuk. Az elv megegyezik a 13.14.ábrán láthatókéval.



13.16.ábra Kitérő tengelyű hengerek áthatásai [2]

A 13.17. ábra tórusz (körgyűrűfelület) és henger áthatását ábrázolja. A vízszintes szeletelősíkok lehetőséget adnak a két felület közös áthatási pontjainak meghatározására. Az áthatási pontok (1-11) megszerkesztése után az adott sorrendben az áthatási pontok összekötésével megkapjuk az áthatási görbét. A láthatóság eldöntése fedőpontpár módszerével vagy un. vizuális módszerrel meghatározható. Ehhez, a módszer gyakorlott térlátást igényel.

Az ábra azt a szeletelősíkot mutatja, ahol az áthatási görbén metszés található és így egyedi pontot alkot ($1''$). A másik két metszés csak látszólagos, mert a görbék kitérők.



13.17. ábra Tórusz és henger áthatása [8]

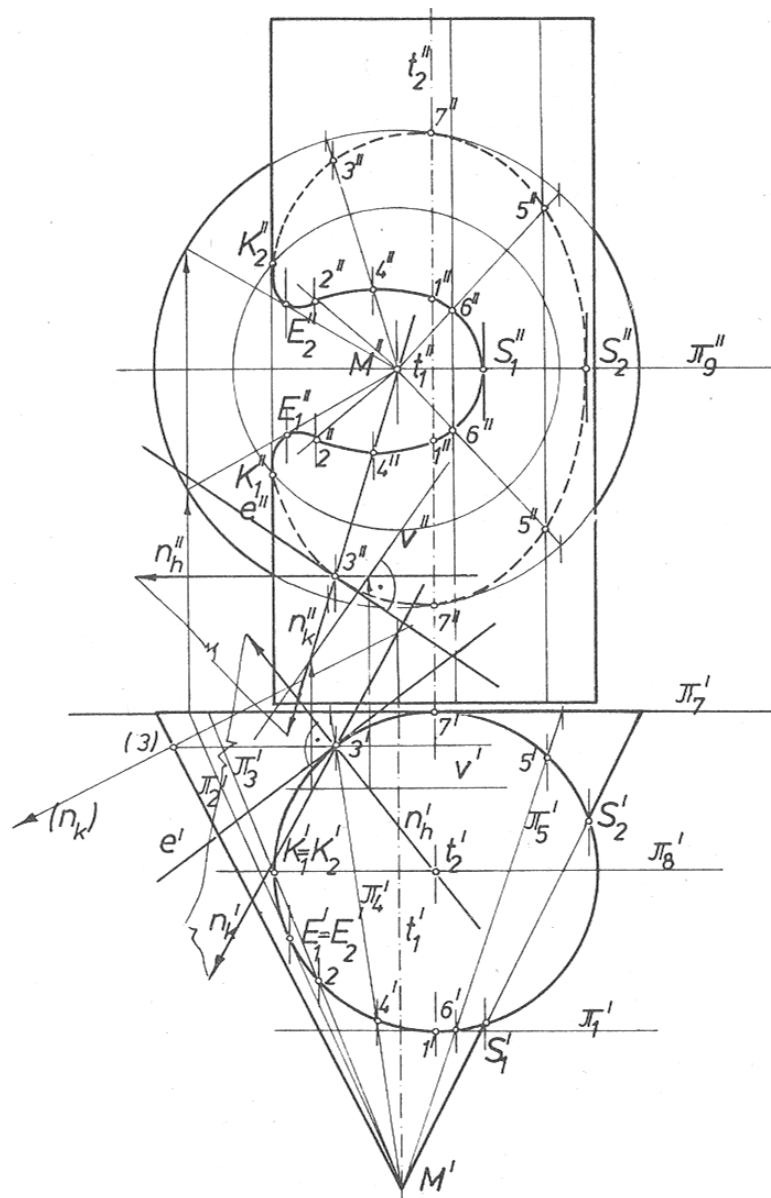
A 13.18. ábrán egy első vetítősugar tengelyű forgási henger és egy második vetítősugar tengelyű forgási kúp áthatását szerkesztettük meg.

Az áthatási görbe pontjait a kúp csúspontjára illeszkedő első vetítő-síkokkal nyertük, Ezen szeletelő síkok a kúpból is, a hengerből is alkotókat metszenek ki, mely alkotók közös pontjai a keresett áthatási pontok.

Csupán a π_1 π_7 és π_8 szeletelő síkok esetében tértünk el ettől a síkválasztástól.

A π_1 szeletelő síkkal a második képsíktól legtávolabb eső 1-es jelű pontokat, a π_7 szeletelő síkkal pedig a második képsíkhöz legközelebb fekvő áthatási pontokat nyertük.

A π_8 szeletelő sík a henger bal oldali kontúralkotóján fekvő K_1 és K_2 jelű áthatási pontokat tartja. A henger jobb oldali második kontúralkotója nem vesz részt az áthatásban.



13.18. ábra Kúp és henger áthatása [12]

A π_2 szeletelő sík érinti a hengert, így ezen síkban fekvő E_1 és E_2 áthatási pontokban az áthatási görbe érintője kúpalkotó, hiszen ez a kúpalkotó a metszéspontokhoz tartozó érintősi-koknak.

A további szeletelő síkokat az áthatási görbe pontosabb megrajzolása céljából vettük fel.

A π_5 szeletelő sík például, metszette a kúpot két alkotóban, a hengert szintén két alkotóban, a kimetszett alkotók 5, 6 pontjai áthatási pontok.

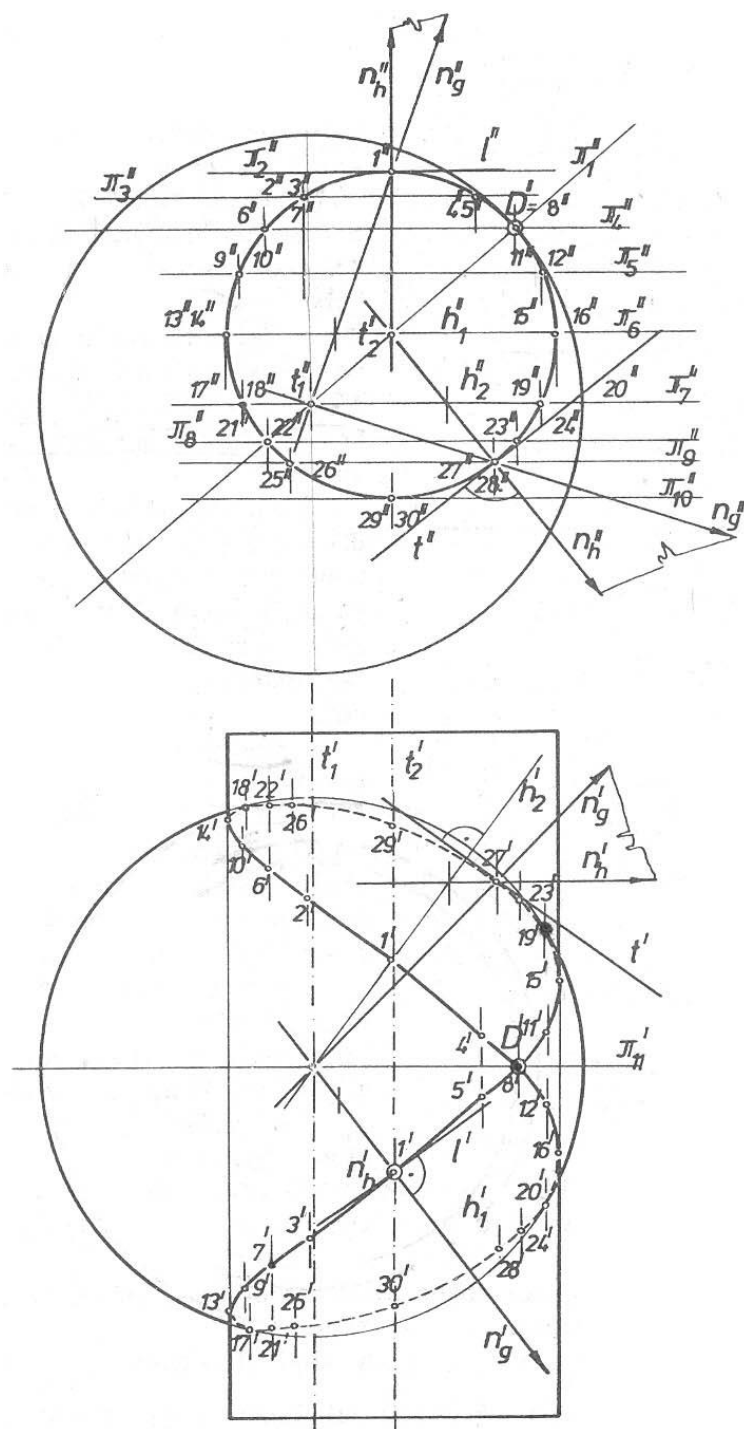
Érintőt az áthatási görbe 3 jelű pontjába szerkesztettünk. Az áthatási pontok közül csak azok látszanak, melyek mindkét felület látható részén fekszenek.

Jóllehet, a két test tengelye kitérő helyzetű egyenes, mégis van a felületeknek közös szimmetriasíkja, mégpedig a kúp tengelyét tartalmazó π_9 első fősík, melyre nézve az áthatási görbe pontjai szimmetrikusak.

A szimmetrikus helyzetű pontokat azonos jellel illettük az ábrában. A π_9 síkban fekvő áthatási pontok az S_1 és S_2 pontok. Ezekben az áthatási görbe érintője első vetítésű.

A 13.19. ábrán gömb és második vetítésű tengelyű henger áthatását szerkesztettük meg. A gömb bármely olyan testtel, melynek tengelye nem halad át a gömb középpontján, párhuzamos tengelyű testpárt alkot.

A feladat megoldható második fősíkokkal is, de ebben az esetben első fősíkokat választottunk szeletelő síkoknak. Ezek a síkok a gömböt első képsíkkal párhuzamos körökben, a hengert pedig alkotókban metszik. Ezek közös pontjai áthatási pontok. Egy szeletelő síkban általában négy áthatási pont van, a hengerből kimetszett két alkotó metszéspontjai a gömbből kimetszett körrel.



13.19.ábra Gömb és henger áthatása [12]

Látjuk, hogy a henger a gömböt a második kontúr D pontjában érinti, azaz a D pontban a két felületnek közös az érintősíkja, a D pont az áthatás egyedi pontja. Ha a két felületnek van közös szimmetriasíkja, akkor ez az áthatási görbének is a szimmetriasíkja.

A t_1 és t_2 tengely által kifeszített π_1 második vetítősík a gömbnek és hengernek közös szimmetriasíkja. Mivel ez a sík az első képsíkkal nem párhuzamos, az áthatási görbe első képe nem lesz kettős vetület. Ebben a π_1 síkban van az áthatási görbe metszéspontja D . A két testnek van még egy K_2 -vel párhuzamos szimmetriasíkja is a π_{11} sík. Így az áthatás második képe kettős vetület. A D pont a π_{11} síkra is illeszkedik.

A π_2 szeletelő síkban az áthatás legmagasabban fekvő 1-es jelű pontjai vannak, csupán két pont, mert ez a sík érinti a hengert. Ebben a síkban a gömbből kimetszett kör 1-es pontbéli érintője az áthatási görbének is érintője.

A π_4 szeletelő síkban a jobboldali hengeralkotó a D pontban érinti a gömbből kimetszett kört. Tehát, e szeletelő síkban fekvő négy áthatási pont közül D -ben kettő egybeesik. A szeletelő síkok által kimetszett hengeralkotók második vetületen a rajtuk fekvő áthatási pontokkal együtt pontoknak látszanak, így második vetületen a pontok közvetlenül adódnak, első vetületen a kimetszett görbék közös pontjaiként kapjuk őket.

A π_6 szeletelő síkban vannak a henger kontúralkotóin fekvő 13, 14, 15 és 16 jelű áthatási pontok.

A π_7 szeletelő síkban a gömb első kontúrján fekvő 17, 18, 19 és 20 jelű áthatási pontok találhatók.

A π_8 szeletelő síkban található még két olyan áthatási pont, mely illeszkedik a közös szimmetriasíkra a 21 és 22 jelű pontok.

A π_{10} szeletelő síkban ismét csak két áthatási pont található, a legalacsonyabban fekvő 29 és 30 jelű pontok.

Az áthatási görbe 1-es és 27-es jelű pontjaiban szerkesztettük meg az érintőket. Ehhez megrajzoltuk az adott ponthoz tartozó felületi normálisokat. A gömb n_g normálisa és a henger n_h normálisa mindkét vetületen közvetlenül rajzolható.

A henger 27 jelű pontjához tartozó normálisa második főegyenes, így a normálisok síkjára merőleges t érintő második képe n''_h -ra merőlegesen megrajzolható.

Az érintő első képét a normálisok síkjában felvett h_2 első főegyenes h_2 első képére merőlegesen megrajzoltuk.

Az 1-es pontbéli 1 érintőt ugyanígy szerkesztettük.

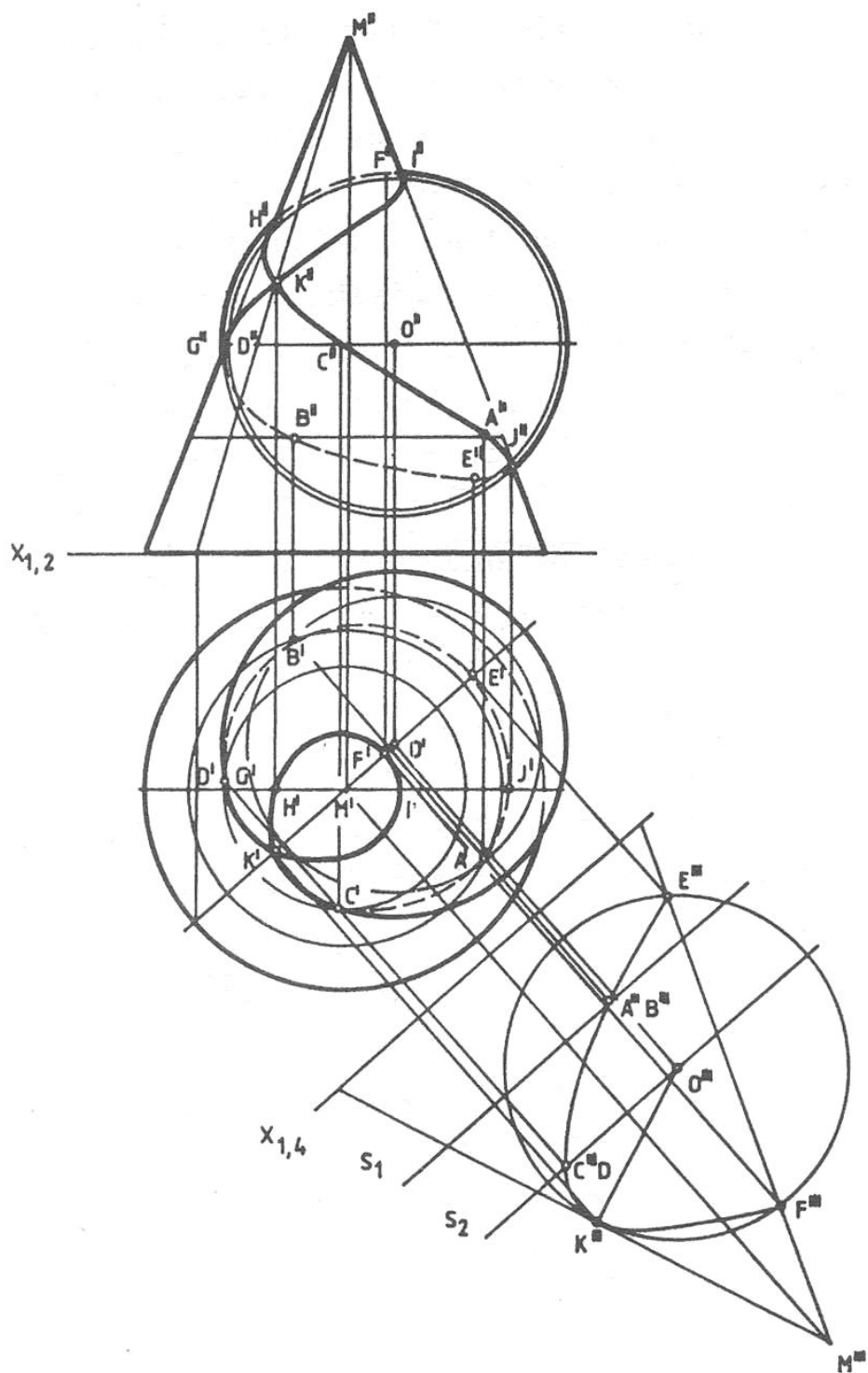
A pontok meghatározása után a kapott első vetületeket a szeletelő síkok sorrendjében egymással gondosan összekötöttük. Az áthatási görbe második képe egybeesik a második vetítősugar tengelyű henger körnek látszó második vetületével.

A gömbön fekvő áthatási pontok közül a π_7 szeletelő síkban fekvő és e fölötti áthatási pontok látszanának első képen, ha ezek közül mind a hengernek is látható részén feküdnenek, de a henger helyezkedik el magasabban, így az dönti el a végső láthatóságot. A hengeren fekvő pontok közül a π_6 szeletelő síkban fekvő és a föltte elhelyezkedő áthatási pontok látszanak. A két testnek egyszerre látható részén fekvő áthatási pontok a 13, 14, 15, 16 és ezek fölött elhelyezkedő további pontok.

Adott az áthatásban résztvevő két test, gömb és kúp a K pontban érinti egymást (13.20.ábra). A két felület érintősíkjai egybeesnek, tehát a K pont az áthatási görbe kettőspontja, az áthatási görbe metszi saját magát. A kettős pontok az esetek többségében benne fekszenek a két felület közös szimmetriasíkjában.

Az ábrán a K_1 -el párhuzamosan csak két szeletelősíkot vettünk fel, ezeket úgy, mint az előző felvételnél mindkét testből egy-egy kört metszenek ki, amelyeknek második képe egyenes. Az A , B pontok általános pontok, a C , D pontok a gömb első képhatárán levők.

A negyedik képen kijelölhető E és F adják az áthatás legmélyebb és legmagasabb pontjait az áthatás szimmetriasíkján. Végül a képhatáron fekvő további pontok meghatározására vegyük fel a K_2 -vel párhuzamos síkot, ezzel a kúpot úgy metszettük el, hogy a metszősík menjen át a tengelyén, tehát második képhatáralkotót kapjunk. Ugyanez a sík a gömbből kört metsz ki, ezáltal jutunk a G , H , I , J pontokhoz. Az előzőekből megállapíthatjuk azt is, hogy a negyedik kép kettősvetület.



13.20. ábra Gömb és forgáskúp áthatása [10]

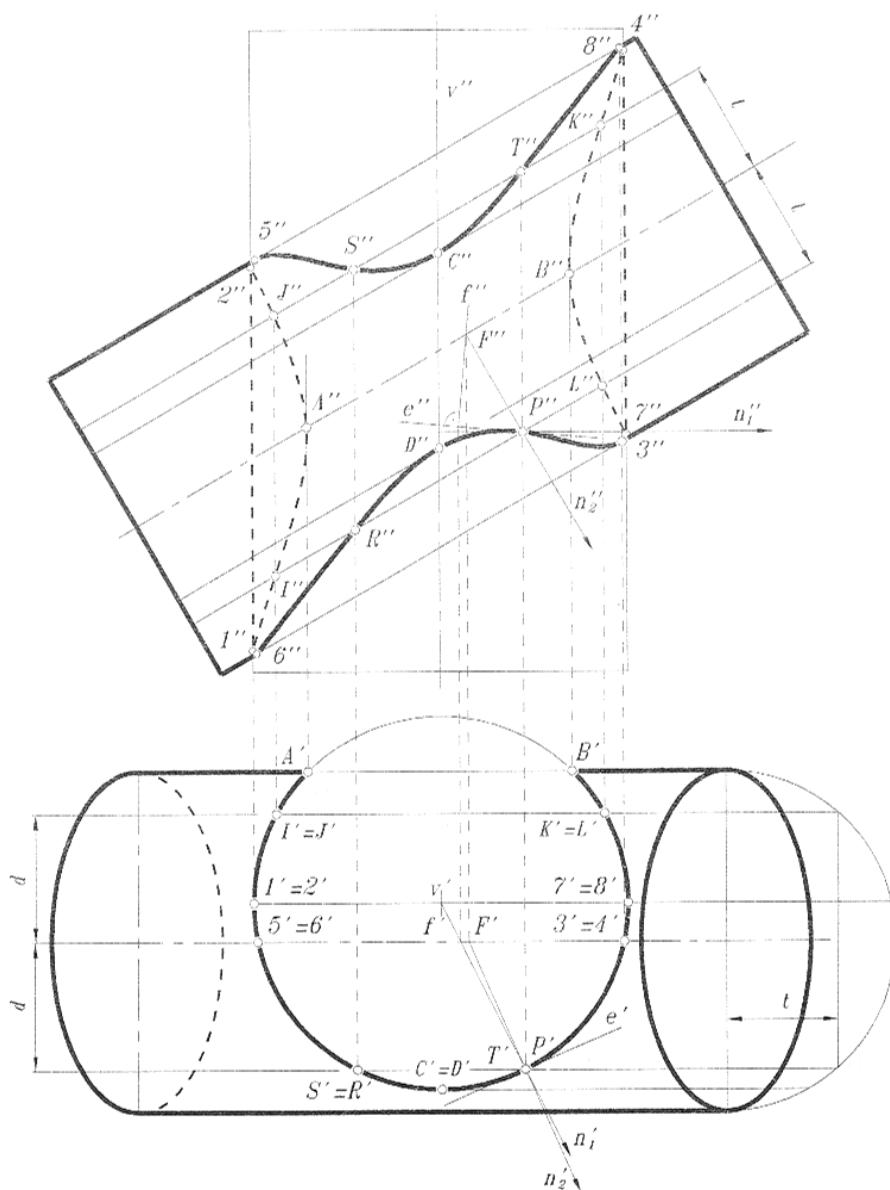
Adott a két henger első és második vetületeivel (13.21. ábra). A hengerek tengelyével párhuzamos szeletelő síkok - amelyek jelen esetben az utolsó képsíkkal párhuzamosak- mindkét hengerből alkotót (alkotókat) metszenek ki.

- Az áthatásnak a vetítőhenger bal oldali második kontúralkotójára illeszkedő pontjai: 1, 2, a jobb oldaliak: 3, 4.
- Az áthatásnak a frontális henger jobb oldali második kontúralkotójára illeszkedő pontjai: 7, 8, a bal oldaliak: 5, 6.
- Azon áthatási pontok az érintővel, amelyekben a vetítő hengeralkotó: (A, B), illetve frontális

hengeralkotó: (C, D) a görbe érintője.

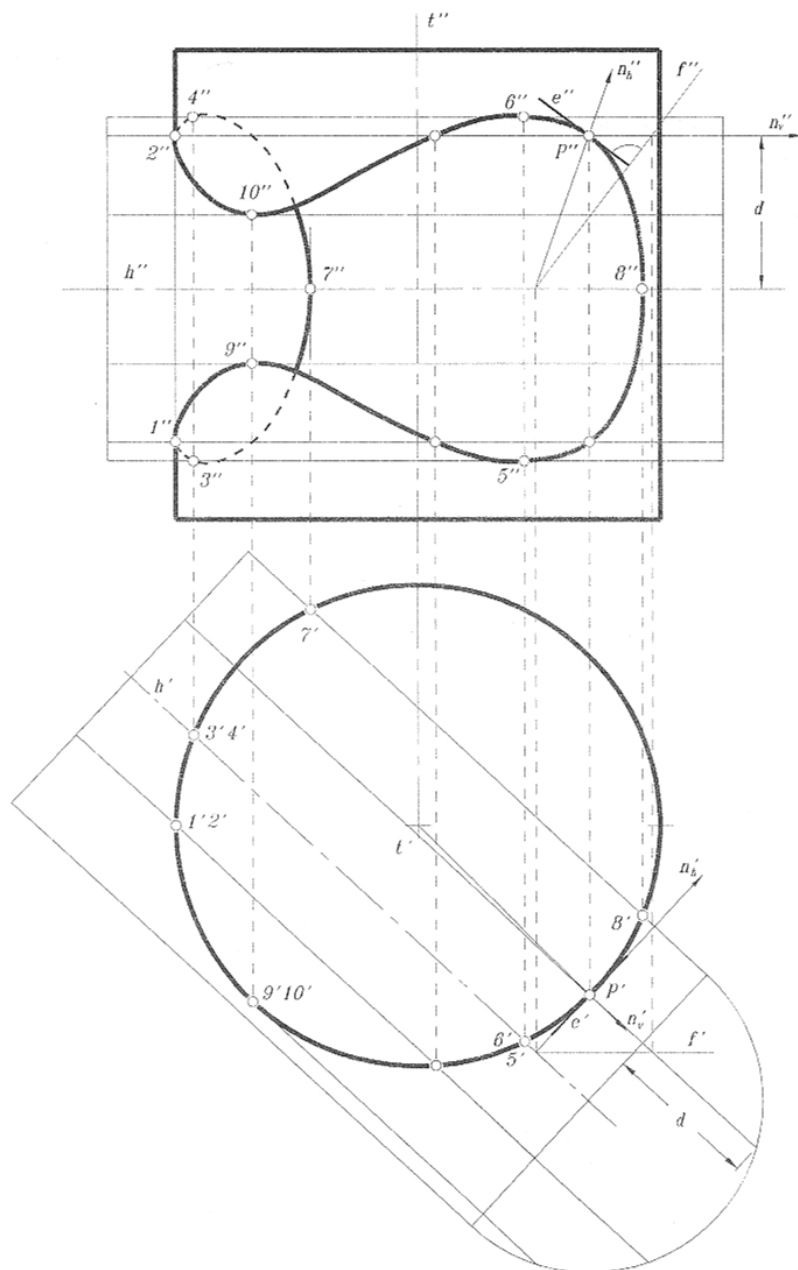
- A. vetítőhenger tengelye előtt és mögött, tőle d távolságra lévő frontális síkbeli áthatási pontok: (P, T, R, S, I, J, K, L) , s közül k. a P -ben a görbe érintője: e .

Láthatóság szerint ábrázoltuk a frontális helyzetű hengertest áthatás utáni megmaradó részét - miután a vetítőhengert eltávolítottuk.



13.21. ábra Henger-henger áthatása [3]

Adott a két henger első és második képével (13.22. ábra). A feladat megoldásához az első képsíkon a henger tengelyével párhuzamos szeletelősíkokat veszünk föl. Ezek lehetnek random jelleggel felvett síkok. De mindenképpen szükségünk van a K1-el ferde szögben álló másik henger fél keresztmetszetének kifordítására az adott síkban, hogy a valódi nagyságát lássuk. Itt tudjuk a szeletelősíkokkal elmetezett hengerkeresztmetszethez tartozó távolságot meghatározni. A síkokhoz tartozó távolságokat a második képsíkon, a metszősíkok által a nagyobbik hengeren kijelölt áthatási pontokat át kell vetíteni és metszésbe hozni a kisebbik hengeren felvett szeletelősíkok által létrehozott ferde keresztmetszeteken. A meghatározott sorrendben összekötjük az áthatási pontokat és meghatározzuk a láthatóságot, attól függően, hogy a két test együtt marad, vagy az egyik test az áthatás után eltávolításra kerül.



13.22. ábra Henger-henger áthatása [3]

14. AXONOMETRIA

A géprajzokon olyan merőleges vetítési rendszert használunk, amelynél a képsík *párhuzamos* a tárgy valamelyik oldalával. Az alakzat egy térbeli derékszögű tengelyrendszerhez kötődik. Beállítható a tárgy úgy is, hogy oldalai a középsíkhoz *ferdén* álljanak, ez esetben minden torzítva látszik ugyan, de szemléletesebb képet kapunk. Ezt az ábrázolási módot hívjuk *axonometriának*. Az axonometria egyképsíkú ábrázolás.

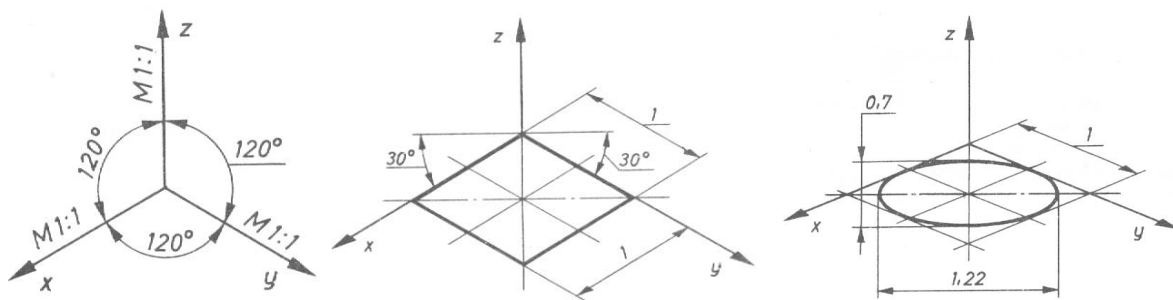
Az axonometrikus ábrázolás előnye, hogy könnyen felismerhető *szemléletes* képet ad, ezért főleg magyarázó ábraként alkalmazzák. Hátránya, hogy a tárgy három oldalát bemutató képet nehéz méretezni.

Az axonometrikus ábrázolási mód önálló géprajzként nem alkalmazható. Szerelési tervek azonban készíthetők - kiegészítő ábraként - axonometrikusan is robbantott-és összeállítási ábrák.

A három fő iránynak megfelelően *három tengelyt* (axis) rajzolunk, amelyek egymással meghatározott szöget zárnak be. Ezekbe az irányokba mérjük az ábrázolandó tárgy szélességét, hosszúságát és magasságát.

14.1. Egyméretű axonometria

A tengelyeket egymáshoz képest a 14.1. ábra szerint meghatározott szögekben rajzoljuk. A függőleges Z tengely az X és Y tengellyel 120° -os szöget zár be. Az X és az Y tengely a vízszinteshez képest 30° -os szöget zár be. A méreteket mindhárom irányban teljes nagyságukban kell felmérni, mindhárom tengely irányában.



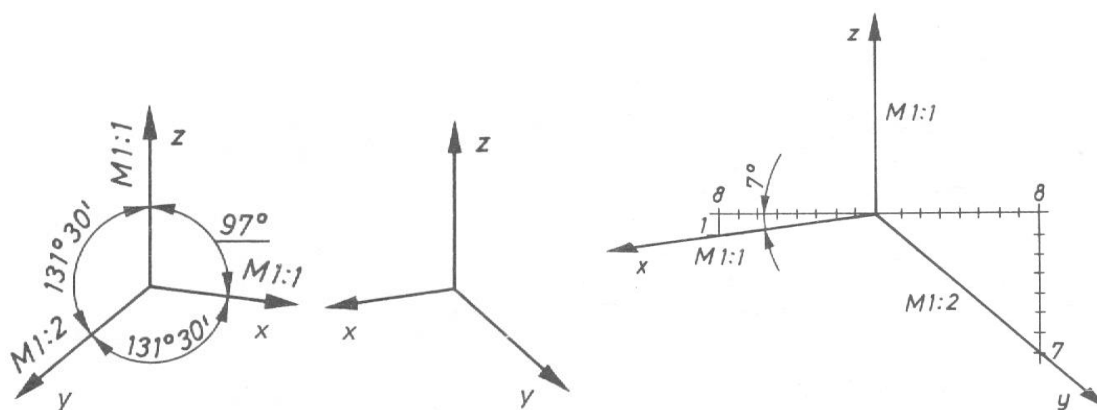
14.1.ábra Egyméretű axonometrikus tengelyrendszer és a benne rajzolt mértani elemek. [11]

14.2. Kétméretű axonometria

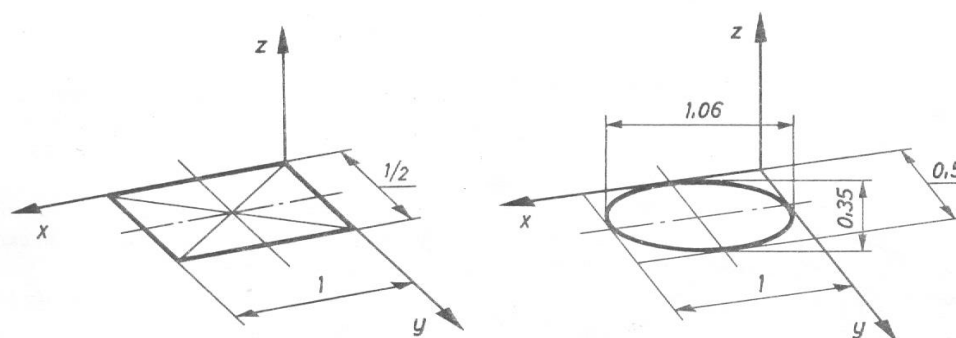
Kevésbé torz ábrát nyújt az a rendszer, amelyben a Z tengely *függőleges*, és ehhez képest az X tengelyt 97° -ra, az Y tengelyt pedig $131^\circ 30'$ -re rajzoljuk a 14.2.ábra szerint.

Az X és a Z tengelyekre a valós értéknek (hossznak) megfelelő méreteket, míg az Y tengely irányában csak a valós érték felét kell felmérni.

A Z tengely és a vízszintes segédegyenes metsződésétől jobbra-balra nyolc tetszés szerinti egységnyi méretet mérünk. Az X tengelynél a nyolcadik egységtől függőlegesen lefelé mérünk egy egységet, az Y tengelynél ugyancsak lefelé hét egységet. A két végpont és a Z metszéspontjának összekötése adja az X és az Y tengelyeket. A Z és az X irányban teljes, az Y irányban fél méretet mérünk.



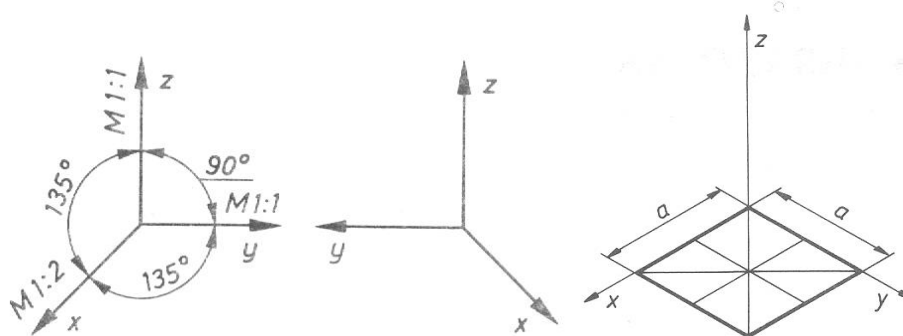
14.2.ábra Kétméretű axonometrikus tengelyrendszer [11]



14.3.ábra Kétméretű axonometrikus tengelyrendszerben rajzolt mértani elemek. [11]

14.3. Frontális axonometria

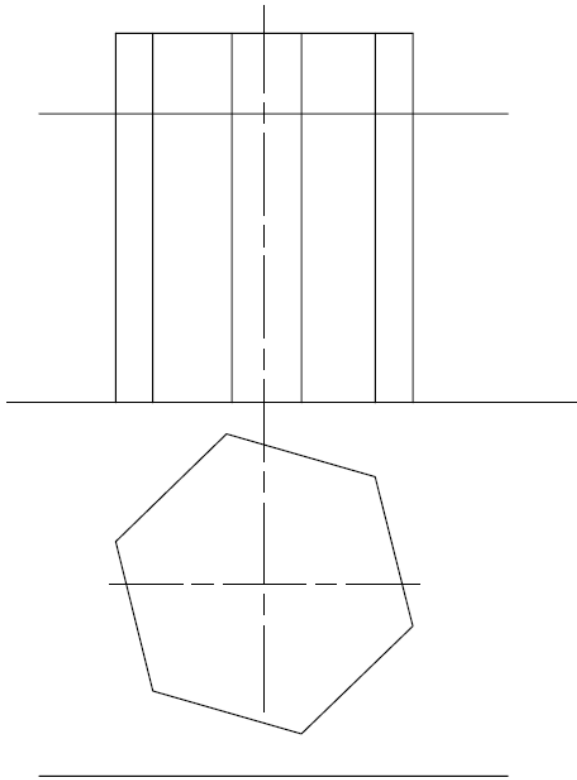
A merőleges vetítésű axonometrikus képen minden méret torzítva látszik. Ezért használják a ferdeszögű axonometrikus képeket, amelyeket frontális (Kavalier) axonometriának is neveznek. Az ilyen *ferdeszögű axonometriában* a test *egyik síkját torzításmentesen* rajzolhatjuk meg, de ehhez kapcsolódóan *a rá merőleges éleket is megrajzoljuk 1:2 rövidüléssel* (14.4.ábra).



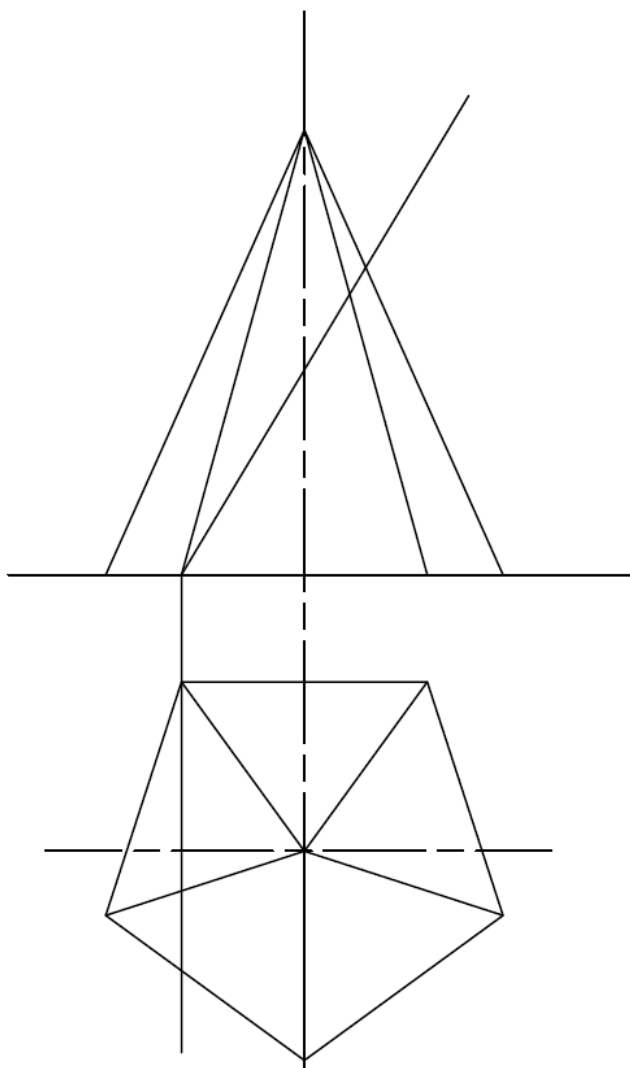
14.4.ábra Frontális axonometrikus tengelyrendszer és benne rajzolt mértani elem. [11]

15.GYAKORLÓ FELADATOK SÍKMETSZÉSEKHEZ ÉS ÁTHATÁSOKHOZ

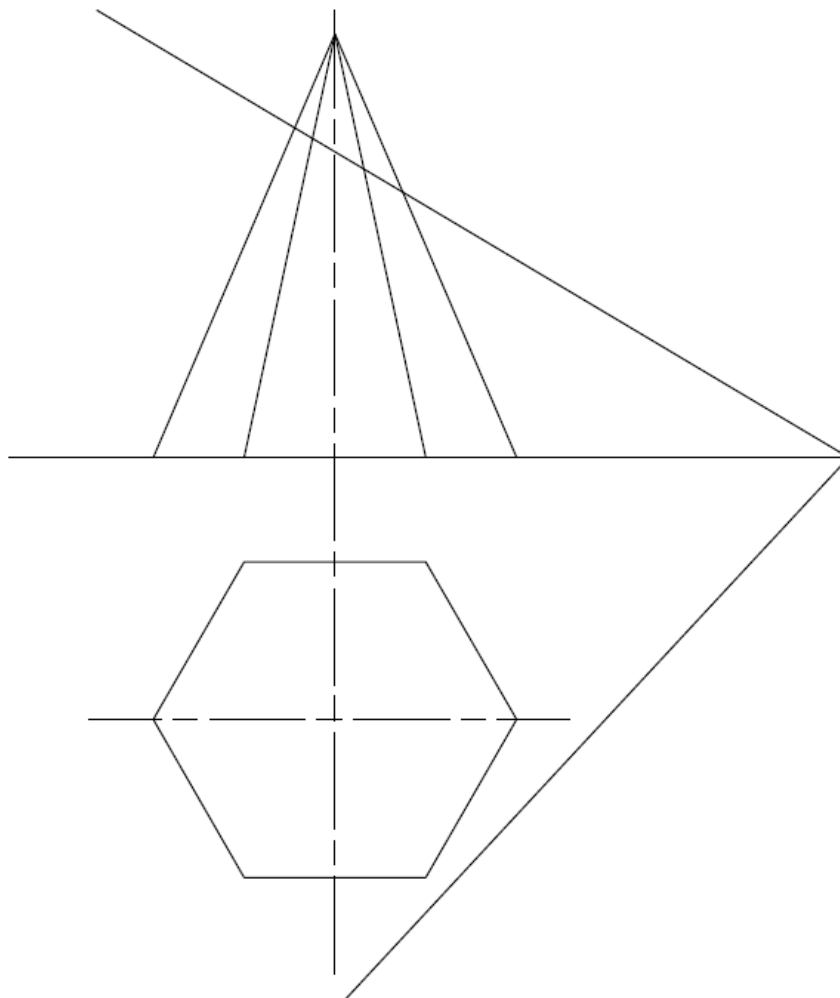
Szerkessze meg a hasáb síkmetszését, határozza meg a síkmetszet valódi nagyságát transzformációval! Határozza meg a metszetet a hasáb harmadik képén is! Terítse ki a hasáb palástját és rajzolja meg a metszésvonalat! Minden rajzi elemet a tanultak szerint jelöljön!



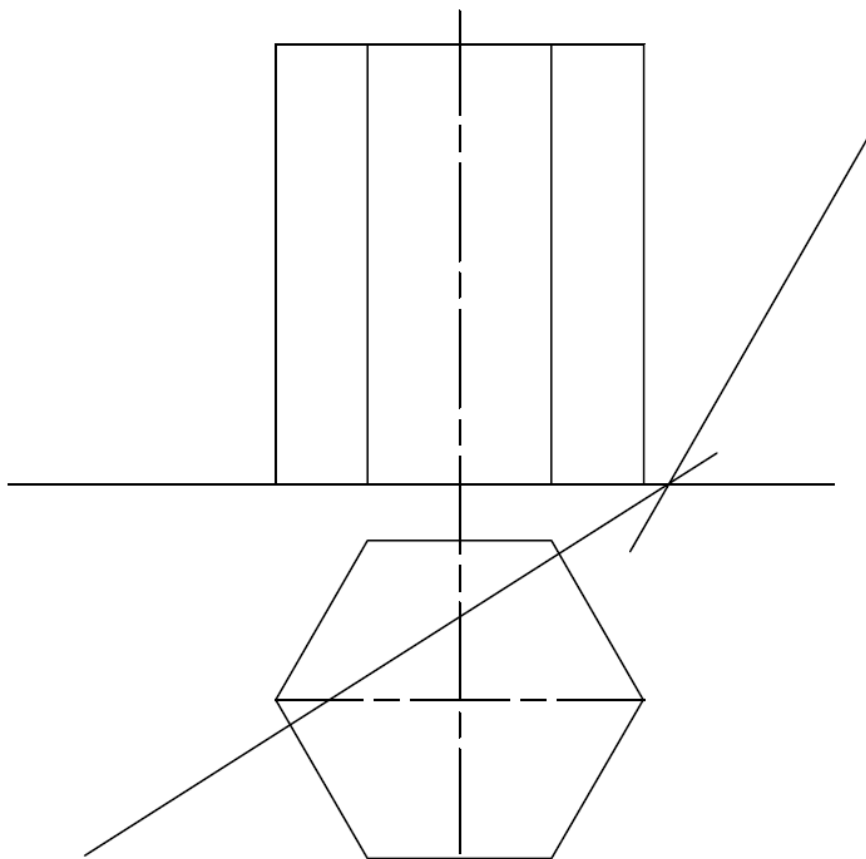
Adott a K1-en álló ötszög alapú gúla első és második képével. Szerkessze meg a gúla és a nyomvonalával adott sík metszésének első és második képét és határozza meg a síkmetszett valódi nagyságát leforgatással! Terítse ki a metszett palástot!



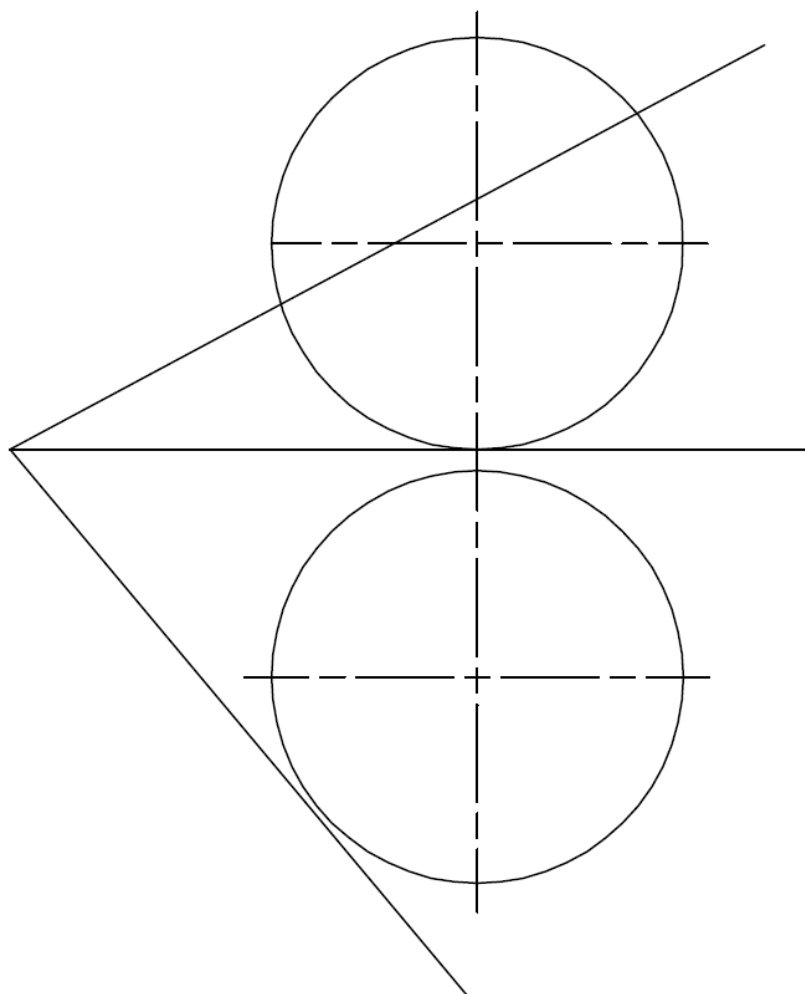
Adott a K1-en álló hatszög alapú gúla első és második képével. Szerkessze meg a gúla és a nyomvonalával adott sík metszésének első és második képét és határozza meg a síkmetszet valódi nagyságát! Terítse ki a metszett palástot!



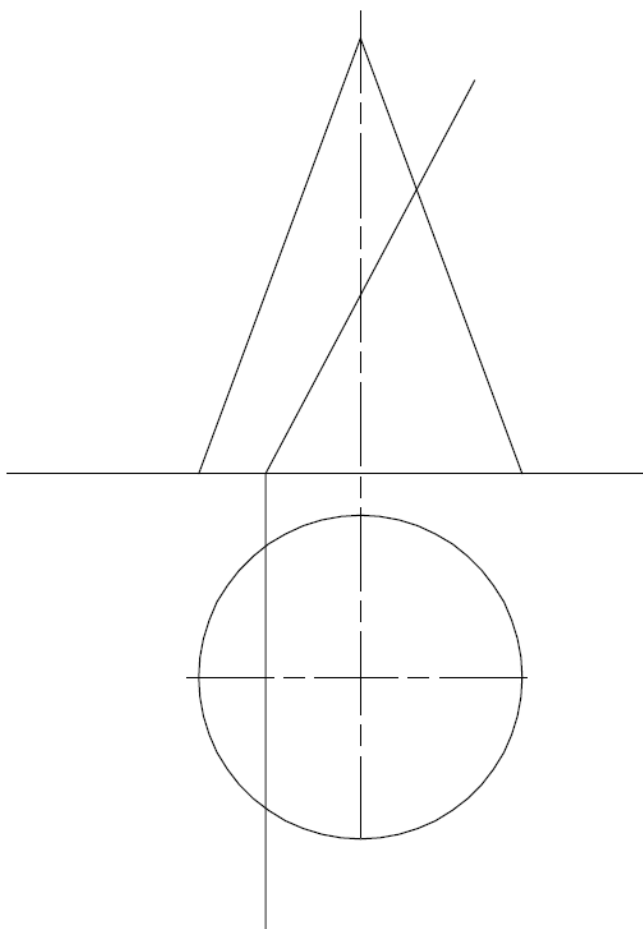
Adott a K1-en álló hatszög alapú hasáb első és második képével. Szerkessze meg a hasáb és a nyomvonalával adott sík metszésének első és második képét és határozza meg a síkmetszet valódi nagyságát! Terítse ki a metszett palástot!



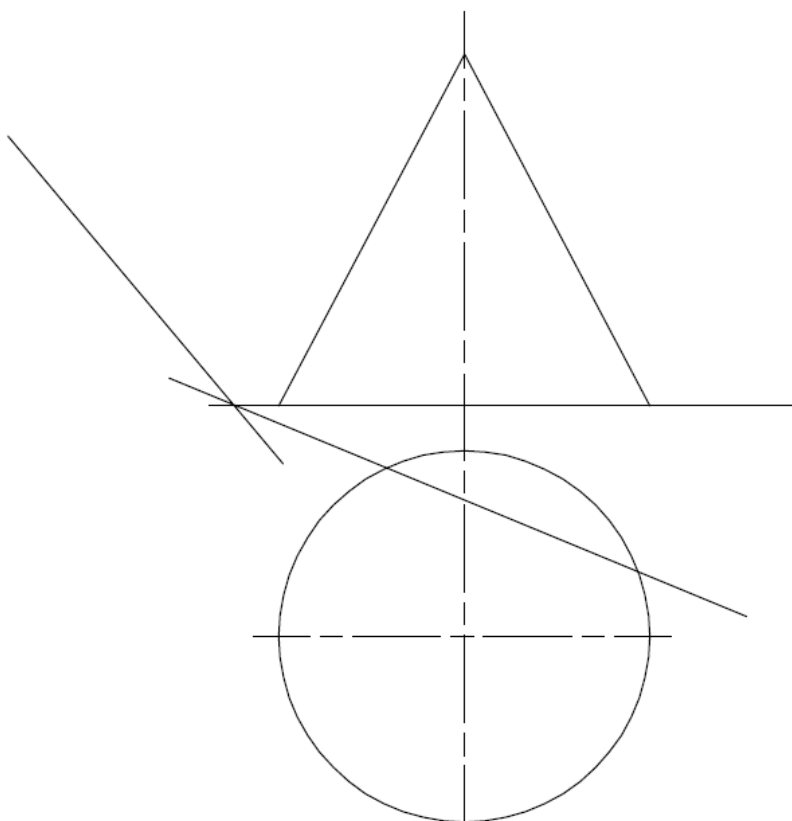
Adott a gömb első és második képével. Szerkessze meg a gömb és a nyomvonalával adott dőlt sík metszésének első és második képét. Rajzolja meg a síkmetszet valódi nagyságát!



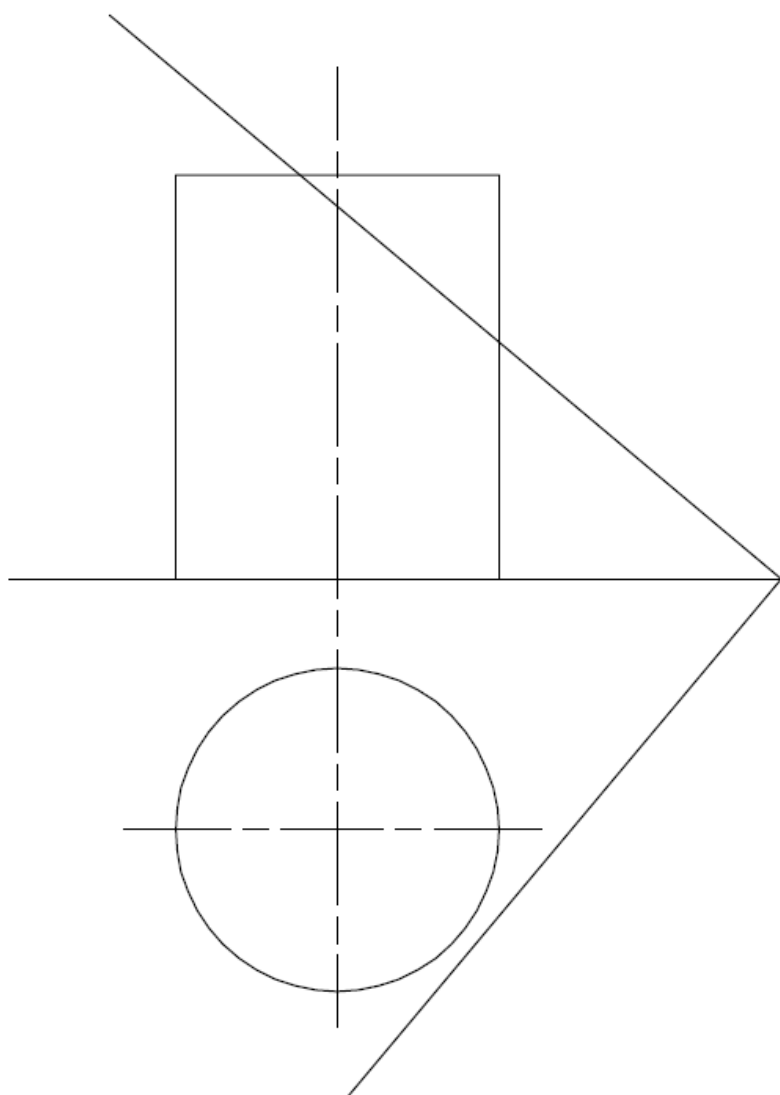
Adott a K1-en álló kúp első és második képe. Szerkessze meg a kúp és a nyomvonalával adott sík metszésének három vetületét és határozza meg a metszett sík valódi nagyságát! Minimum 12 pontot jelöljön! Terítse ki a kúppalástot!



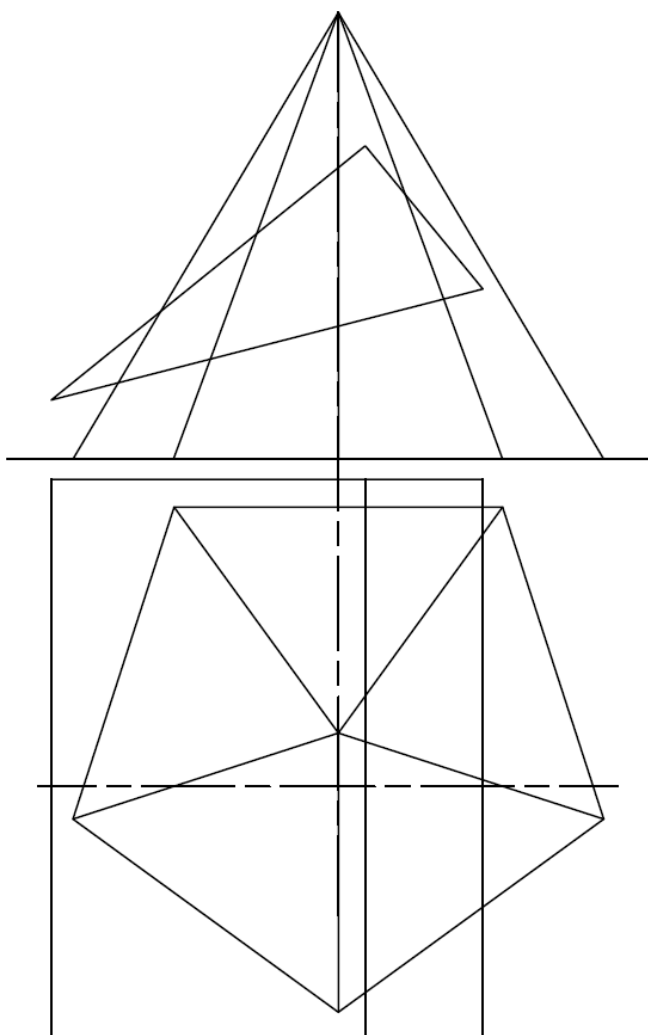
Adott a K1-en álló kúp első és második képe. Szerkessze meg a kúp és a nyomvonalával adott sík metszésének három vetületét és határozza meg a metszett sík valódi nagyságát! Terítse ki a kúppalástot!



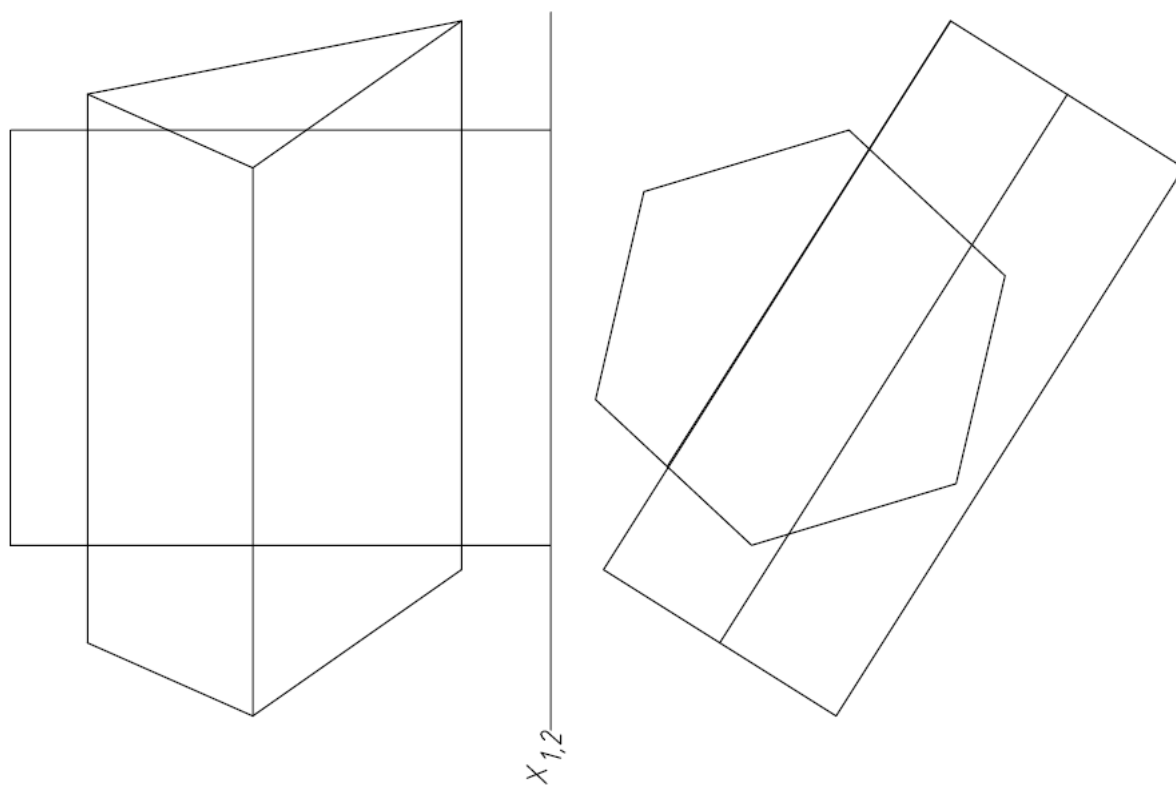
Adott a K1-en álló henger első és második képe. Szerkessze meg a henger és a nyomvonalával adott dőlt sík metszetének első és második képét. Határozza meg a metszett sík valódi nagyságát! Terítse ki a hengerpalástot!



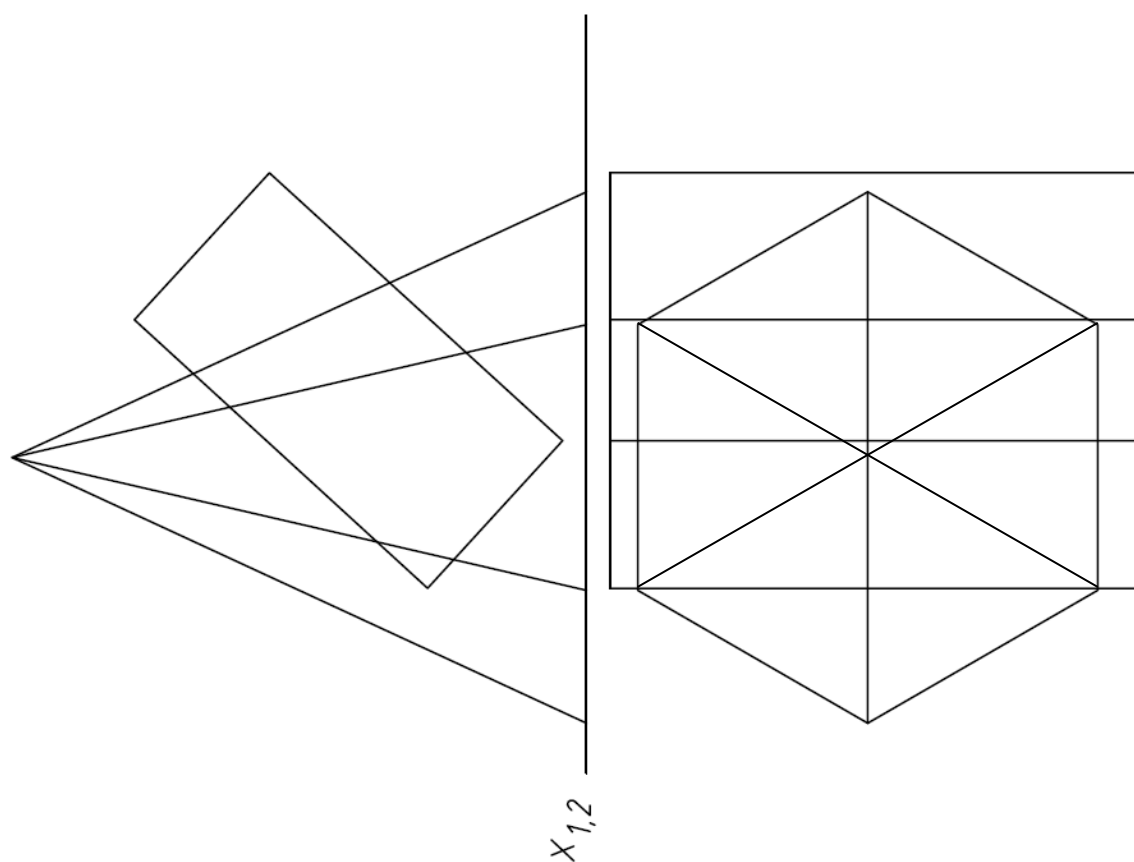
Szerkessze meg két síklapú test áthatását! Tüntesse fel az áthatási vonalakat láthatóság szerint úgy, hogy a két test együtt marad. Szerkessze meg az áthatás harmadik képét is!



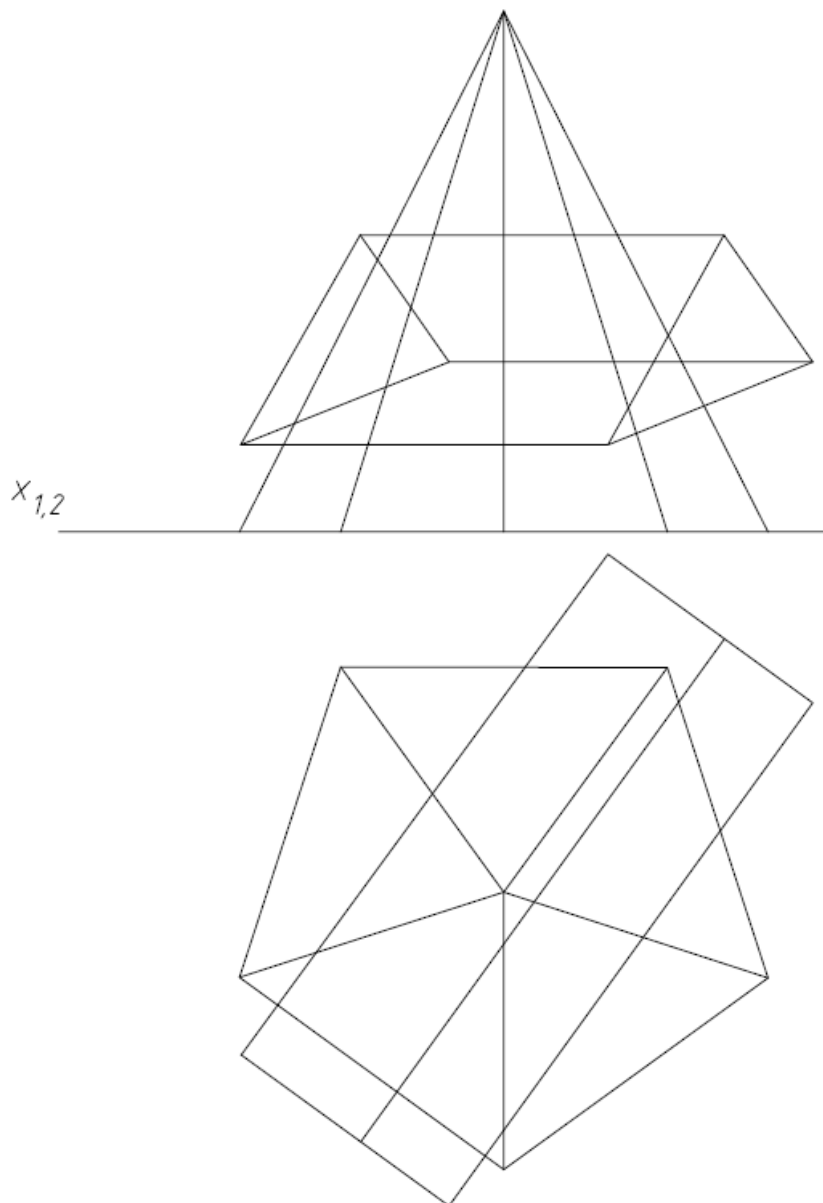
Szerkessze meg két síklapú test áthatását! Tüntesse fel az áthatási vonalakat láthatóság szerint úgy, hogy a két test együtt marad. Szerkessze meg az áthatás harmadik képét is! A nem látható éleket és áthatási vonalakat is jelölje!



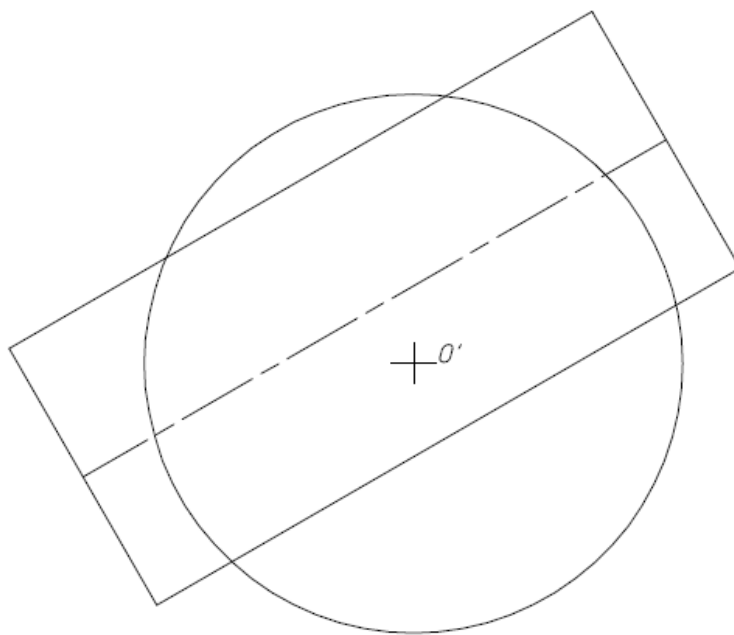
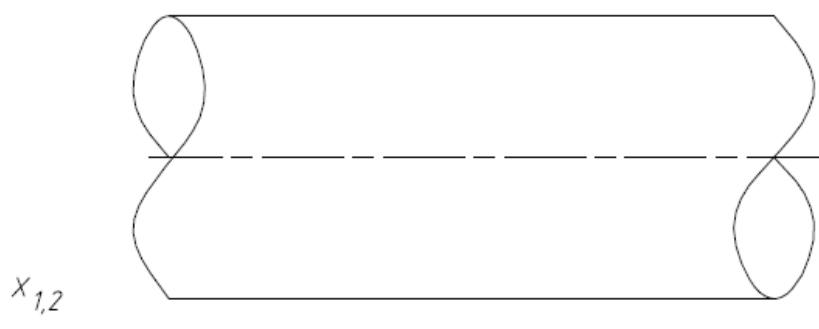
Szerkessze meg két síklapú test áthatását! Tüntesse fel az áthatási vonalakat láthatóság szerint úgy, hogy a két test együtt marad. Szerkessze meg az áthatás harmadik képét is! A nem látható éleket és áthatási vonalakat is jelölje!



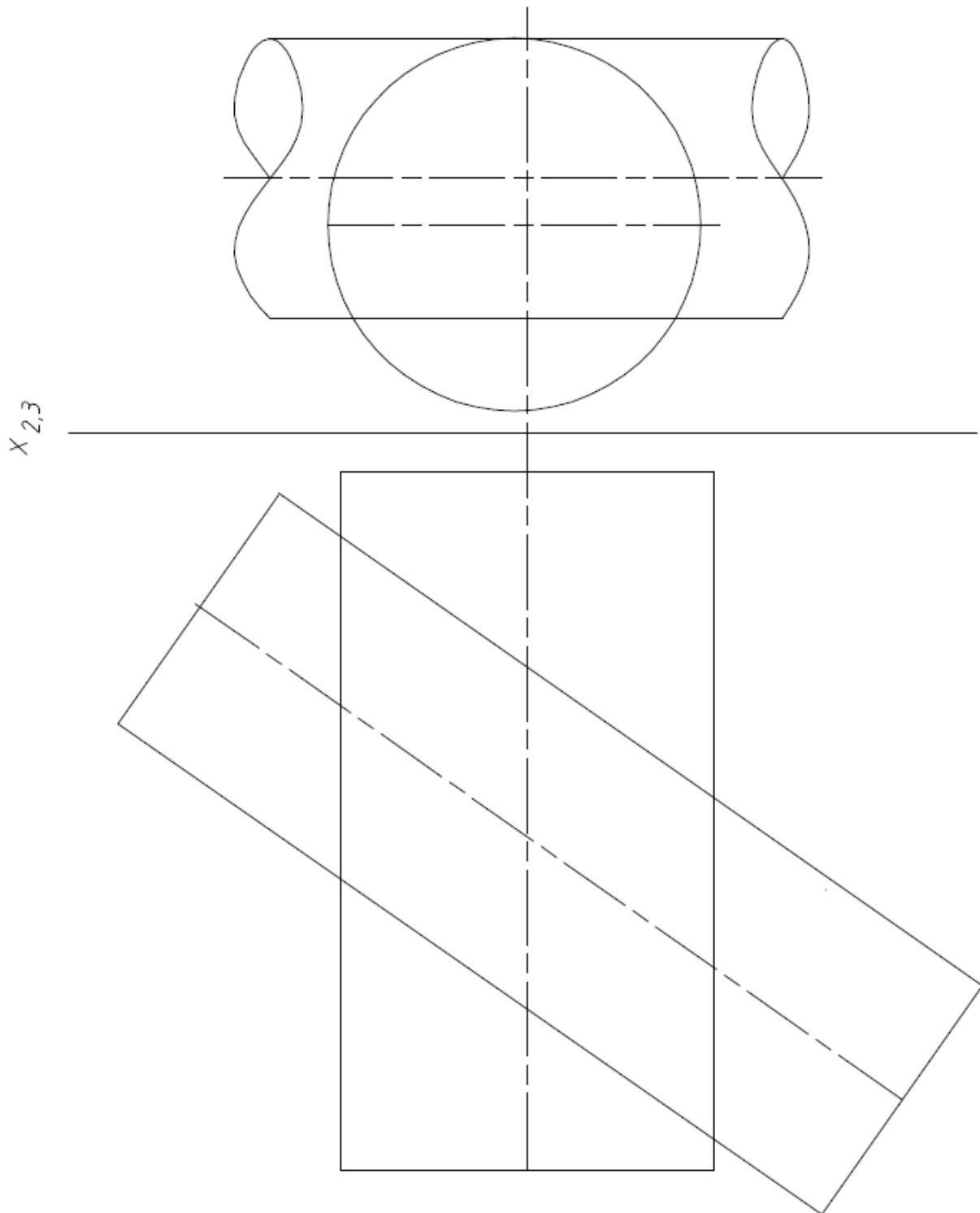
Szerkessze meg két síklapú test áthatását! Tüntesse fel az áthatási vonalakat láthatóság szerint úgy, hogy a két test együtt marad. Szerkessze meg az áthatás harmadik képét is! A nem látható éleket és áthatási vonalakat is jelölje! A feladatot transzformálással oldja meg!



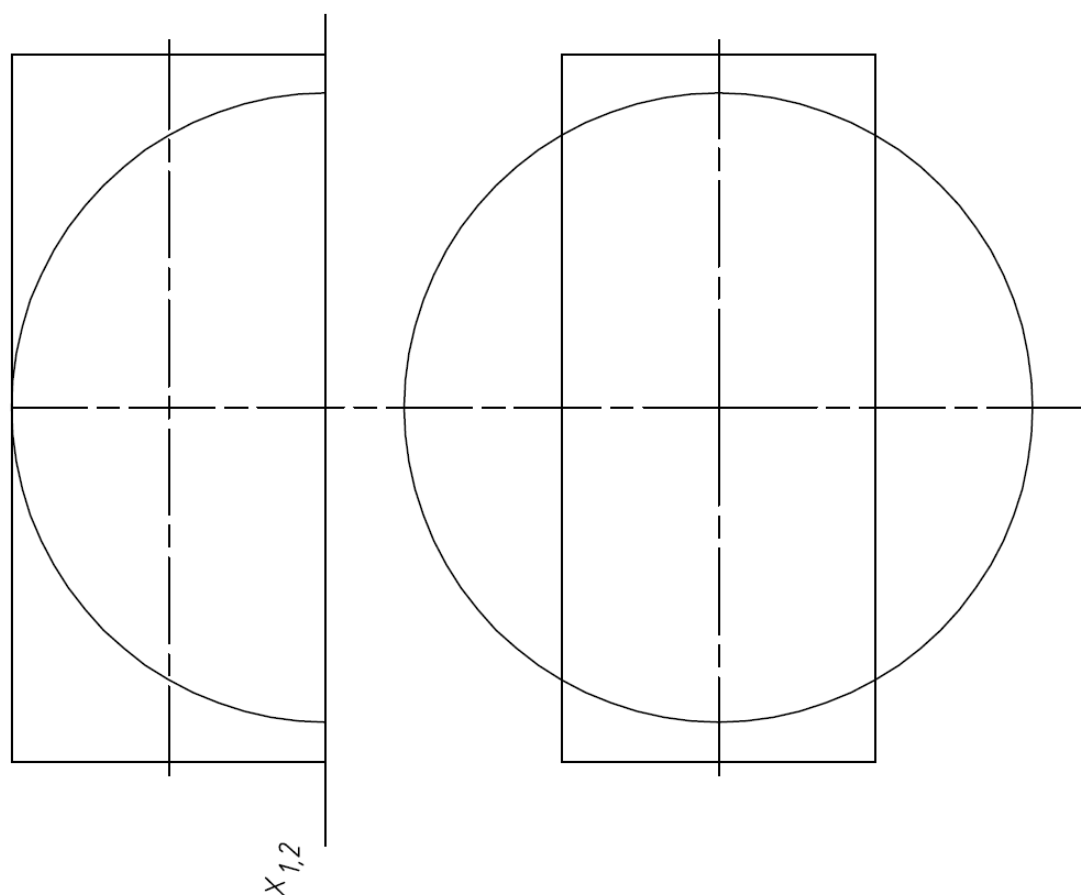
Szerkessze meg a kúp és a henger áthatási görbét az első, második képen! Húzza ki az áthatási görbét a láthatóság szerint úgy, hogy a két test együtt marad. Mutassa meg a takarásban lévő áthatási vonalakat is! Adott a kúp alapköre és első képének középpontja, magassága 71mm. A feladatot transzformációval oldja meg!



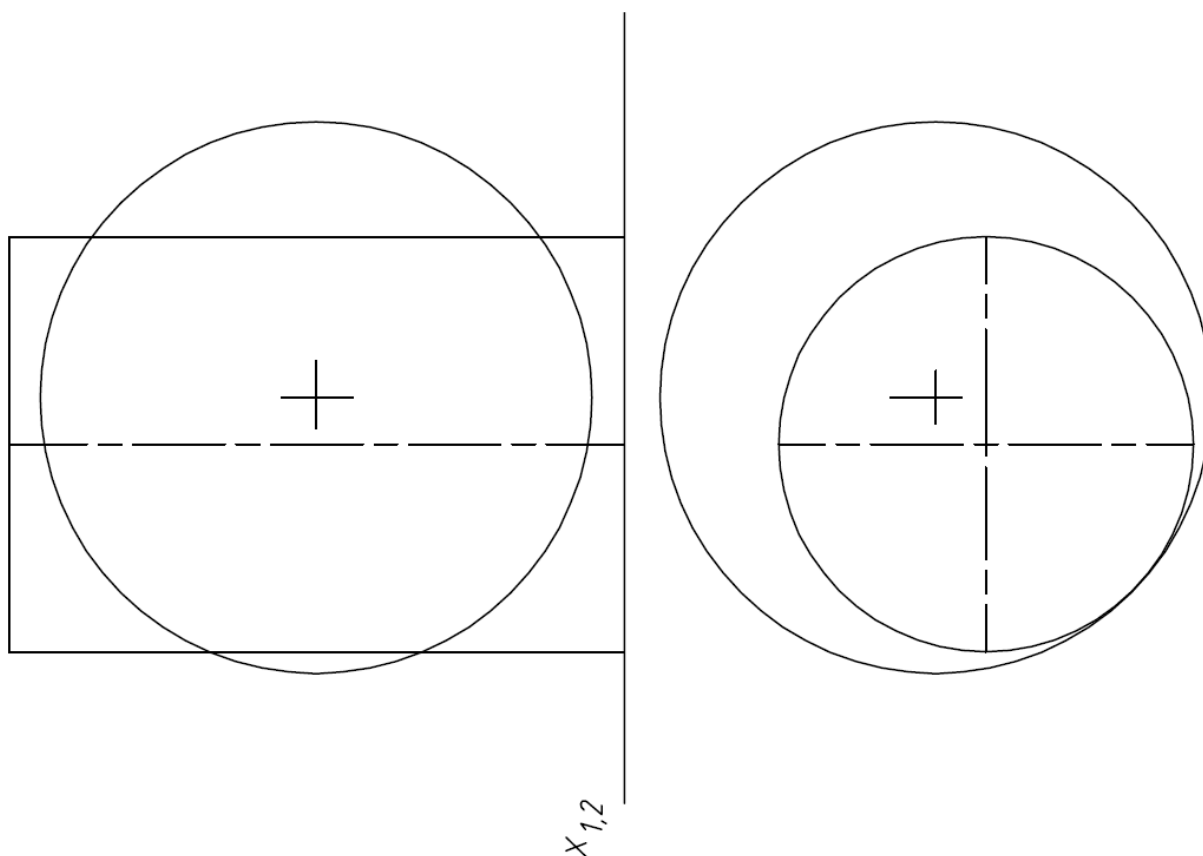
Szerkessze meg a két henger áthatási görbét az második és harmadik képen! Húzza ki az áthatási görbét a láthatóság szerint úgy, hogy a két test együtt marad. Mutassa meg a takarásban lévő áthatási vonalakat is!



Szerkessze meg a félgömb és a henger áthatási görbét az első, második és harmadik képen! Húzza ki az áthatási görbét a láthatóság szerint úgy, hogy a két test együtt marad! A takart vonalakat is ábrázolja!



Szerkessze meg a gömb és a henger áthatási görbét az első, második és harmadik képen!
Húzza ki az áthatási görbét a láthatóság szerint úgy, hogy a két test együtt maradjon! A takart vonalakat is ábrázolja!



IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Dr. Benczik László, Dr. Hosszú Miklósné: Ábrázoló geometria Példatár
Gödöllői Agrártudományi Egyetem, Mezőgazdasági Gépészmérnöki Kar, Gödöllő, 1973.
- [2] Bukovinszky László: Műszaki Rajz I.rész jegyzet
Mezőtúr, Mezőgazdasági Gépészmérnöki Kar, 1974.
- [3] Geiger János: Ábrázoló geometria feladatgyűjtemény
Miskolc Miskolci Egyetemi Kiadó 2012.
- [4] Glósz István: Ábrázoló Geometria I. jegyzet
Budapest, Agrártudományi Egyetem, 1965.
- [5] Homonnay György, Lukács Ottó: Géprajz – Gépelemek I-II. Kézirat
Könnnyűipari Műszaki Főiskola, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- [6] Magyar Sándor, Madján István, Tábori László: Géprajzi alapismeretek
Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [7] Móricz József: Géprajz
Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1979 ISBN:963 10 2520 9.
- [8] Ocskó Gyula Rajz 2. Vetületi Ábrázolás
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1990
- [9] Dr. Petrich Géza: Ábrázoló Geometria I. rész Egyetemi könyv
Tankönyvkiadó Budapest, 1973
- [10] Szabó Imréné, Guth Ferenc, Dr. Vas Rezső, Szabóné Nagy Zsuzsa: Műszaki Ábrázolás
(Elmélet, gyakorlat) 4. kiadás Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1991.
- [11] Tornyai Sándor: Bádogos szakrajz és szerkezetek
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987
- [12] Dr. Vaskó Lászlóné: Ábrázoló geometria, Ybl Miklós Építőipari Műszaki Főiskola
Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.